DER BIEGESTOSS AUF EINE DÜNNE PLATTE BEI ELASTO-PLASTISCHER KONTAKTWECHSELWIRKUNG

- EINE VEREINFACHTE THEORIE UND IHRE EXPERIMENTELLE ÜBERPRÜFUNG -

Doktorarbeit
zur
Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der
Abteilung für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
Hubert Dombrowski
geb. in Gelsenkirchen

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544719_0010

DER BIEGESTOSS AUF EINE DÜNNE PLATTE BEI ELASTO-PLASTISCHER KONTAKTWECHSELWIRKUNG

- EINE VEREINFACHTE THEORIE UND IHRE EXPERIMENTELLE ÜBERPRÜFUNG -

Doktorarbeit
zur
Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der
Abteilung für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
Hubert Dombrowski
geb. in Gelsenkirchen

Bochum 1981

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Schwieger, dem Leiter der Arbeitsgruppe Experimentelle Mechanik und Herrn Prof. Dr. Ing. H. Waller, dem Leiter der Arbeitsgruppe Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik danke ich für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Doktorarbeit eingereicht am: 11.02.1981
Tag der mündlichen Prüfung : 15.05.1981
Referent : Prof. Dr. rer. nat. H. Schwieger
Korreferent: Prof. Dr. Ing. H. Waller

Zusammenfassung

In der Praxis vorkommende Biegestöße auf Platten führen schon bei relativ geringen Stoßgeschwindigkeiten des stoßenden Körpers zur Kraterbildung an der Kontaktstelle. Aus diesem Grunde kann man das Hertzsche Kontaktkraftgesetz nicht mehr anwenden, so daß zu einer Beschreibung dieser Stoßwechselwirkung elasto-plastische Kontaktkraftgesetze herangezogen werden müssen.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es daher, neben dem grundsätzlichen Studium der Kontaktwechselwirkung zwischen Stoßmasse und gestoßenem Plattenelement zu untersuchen, inwiefern die elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze, deren Parameter im Gegensatz zu der hier vorgestellten Methode bisher nur durch statische Versuche bestimmt wurden, das Kontaktgeschehen beschreiben können.

Dazu wurden aus gemessenen Stoßkraftverläufen die gegenseitigen Annäherungen von Stoßkugel und gestoßenem Plattenelement berechnet. Auf diese Weise erhält man eine Stoßkraft-Annäherung-Beziehung - die elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze - deren Parameter für verschiedene Stoßkombinationen, Kugeldurchmesser und Stoßgeschwindigkeiten bestimmt werden.

Mit Hilfe der elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze und ihren dazugehörigen Parametern wurde eine vereinfachte Stoßtheorie entwickelt, die das dynamische Verhalten schlagartig belasteter Platten bei elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung beschreibt und eine einfache Abschätzung maximaler Belastung über eine Stoßkennzahl gestattet. Die angestrebte Vereinfachung der Stoßtheorie ist nur innerhalb eines sogenannten Frühstadiums möglich, in dem die von der Einspannung reflektierten Wellen noch keinen merklichen Einfluß auf

den Spannungszustand an der Stoßstelle haben, was für die meisten in der Praxis vorkommenden Fälle durchaus zutrifft. Der Ersatz der in der Beziehung für die Durchbiegung bzw. für die Krümmung unter dem Stoßpunkt jeweils vorkommenden Reihe durch ein uneigentliches Integral innerhalb des Frühstadiums führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Plattenstoßtheorie.

Wie früher schon bei elastischem Kontaktverhalten mit Erfolg angewendet, so läßt sich auch hier eine Stoßkennzahl einführen, die den transversalen Stoß auf eine dünne Platte bei elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung charakterisiert. Um in einfacher Weise die maximalen Belastungsgrößen bestimmen zu können, werden dimensionslose Stoßkräfte, Durchbiegungen und Hauptbiegungsmomente für verschiedene Stoßkennzahlen aus Differential- und Integralbeziehungen berechnet.

Die gute Übereinstimmung gemessener und theoretisch ermittelter Größen wie Stoßkräfte, Durchbiegungen und Biegedehnungen spricht nicht nur für eine gewisse Leistungsfähigkeit der vereinfachten Stoßtheorie, sondern auch für die hier vorgestellte Methode der aus dynamischer Beanspruchung ermittelten Parameter der Kontaktkraftgesetze.

Außerdem wurden die Parameter der elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze für den Stoß einer Kugel auf einen unendlichen Halbraum (Block) bestimmt. Die Versuchsergebnisse des Blockstoßes zeigen aber, daß man im Gegensatz zu Aussagen anderer Arbeiten, die für den Blockstoß erhaltenen Parameter nicht zur Beschreibung der Kontaktwechselwirkung einer transversal gestoßenen Platte benutzen kann. [*)]

[*)] Bis auf den Grenzfall einer unendlich dicken Platte.

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen

1. Einleitung

2. Vereinfachte Darstellung der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt

3. Vereinfachte Darstellung des Biegungsmomentes unter dem Stoßpunkt

4. Differentialgleichung der Stoßkraft und Integralbeziehung für die gegenseitige Annäherung

5. Elasto-plastische Kontaktkraftgesetze und deren Parameterbestimmung

6. Kinematik der Stoßkugel und des gestoßenen Plattenelementes während der Kontaktwechselwirkung

7. Betrachtungen zum Stoß einer Kugel auf einen unendlichen Halbraum (Blockstoß)

8. Stoßapparatur und verwendete Meßprinzipien

9. Anordnung zur rechnerunterstützten Auswertung und Weiterverarbeitung gemessener Daten

10. Vergleiche zwischen Theorie und Experiment

11. Schlußbemerkungen

12. Schrifttum

13. Bilder und Tabellen

Formelzeichen

a	Beschleunigung
A	Ankunftszeit der vom Rand reflektierten Wellen am Stoßpunkt (berechnet)
A_p	$R^2 \pi$ Plattenfläche
b_n	$\int_0^R g_n^2(r)\, r\, dr$
B	$E_p h^3/(12(1-\nu_p^2))$ Biegungssteifigkeit
c_B	Biegewellengeschwindigkeit
d_K	Kugeldurchmesser
d_T	Durchmesser des Stoßkraters
E_p, E_K	Elastizitätsmodul der Platte bzw. der Kugel
$f_n(t)$	Zeitfunktion bei Plattenschwingungen
$\dot{f}_n(t)$	df_n/dt
$\ddot{f}_n(t)$	$d^2 f_n/dt^2$
$F(t)$	Zeitlicher Verlauf der Stoßkraft
F_{max}	Maximale Stoßkraft
$g_n(r)$	Eigenfunktion bei Plattenschwingungen
G_p	$E_p/(2(1+\nu_p))$ Schubmodul der Platte
G'_p	Bezogener Schubmodul der Platte (siehe /84/)
h	Plattendicke
HB	Brinellhärte
I	Elektrischer Strom durch den Dehnungsmeßstreifen (DMS)
I_o, I_1	Besselsche Funktion nullter bzw. erster Ordnung mit imaginärem Argument
J_o, J_1	Besselsche Funktion nullter bzw. erster Ordnung mit reellem Argument
k_g	k-Faktor des DMS

m_p, m_K	Masse der Platte bzw. der Kugel
m_r, m_φ	Radiales bzw. tangentiales Biegungsmoment
$M_o(t)$	Zeitlicher Verlauf des auf die Längeneinheit des Schnittes bezogenen Biegungsmomentes unter dem Stoßpunkt
M_{omax}	Maximales Biegungsmoment unter der Stoßstelle
M^*_{oB}, M^*_{oE}	Dimensionsloses Biegungsmoment für die Belastung bzw. Entlastung
M^*_{max}	Maximales dimensionsloses Biegungsmoment
n	Ordnungszahl der Plattenschwingung
$\bar{N}$	Belastungskoeffizient
p	Belastungsexponent
P_n	Eigenwertparameter
q	Entlastungsexponent
q_r, q_φ	Querkräfte am Plattenelement
$\bar{q}(r,t)$ $\bar{q}(x,y,t)$	Flächenlast (senkrecht zur Plattenmittelfläche)
q_n	Allgemeine Lagekoordinaten
$\dot{q}_n$	dq_n/dt
Q	Querempfindlichkeit des DMS
Q_n	Nichtkonservative generalisierte Kräfte im System
r	Polarkoordinate
r_A	Ortskoordinate des Aufprallpunktes der Kugel
r^*_K	Kontaktradius
r_{KR}	Krümmungsradius des Stoßkraters
R	Plattenradius
R_{DMS}	Widerstand eines DMS
S	Summenausdruck der unendlichen Reihe in der Beziehung für die Durchbiegung

t, t', t''	Zeitveränderliche
t_o	Zeitkonstante (berechnet aus Kontaktfläche)
t_V	Verzögerungszeit
t_{K1}	Kontaktzeit des ersten Stoßintervalls
$t_{Früh}$	Dauer des Frühstadiums
t_{Fmax}	Zeitpunkt maximaler Stoßkraft
$t_{\alpha max}$	Zeitpunkt maximaler Annäherung
$t_{\alpha rem}$	Zeitpunkt bleibender Annäherung
$t_{\varepsilon omax}$	Zeitpunkt maximaler Biegedehnung
T	Kinetische Energie der Platte
T_{exp}	Experimentell ermittelte Dauer einer Plattenschwingung (Grundschwingung)
T_R	Referenzzeit
u	βn^2
ΔU	Elektrische Spannungsänderung am DMS
v_o	Stoßgeschwindigkeit
v_o'	Geschwindigkeit der Stoßkugel zum Zeitpunkt t_{K1} (= Rückprallgeschwindigkeit beim Einfachstoß)
V	Potentielle Energie der Platte
$w(t)$	Verschiebung des Schwerpunktes der Stoßmasse nach Stoßbeginn
$\dot{w}(t)$	dw/dt
$\ddot{w}(t)$	d^2w/dt^2
$w(t_{K1})$	Verschiebung der Kugel zum Zeitpunkt t_{K1}
$W(r,t)$ $W(x,y,t)$	Durchbiegung der Plattenmittelfläche
$\dot{W}(t)$	dW/dt
$W_o(t)$	Zeitlicher Verlauf der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt

$\dot{W}_o(t)$	dW_o/dt
$\dot{W}_{omax}$	Maximale Schwerpunktsgeschwindigkeit des gestoßenen Plattenelementes innerhalb des Frühstadiums
$\ddot{W}_o(t)$	d^2W_o/dt^2
W^*_{oB}, W^*_{oE}	Dimensionslose Durchbiegung für die Belastung bzw. Entlastung
x,y,z	Kartesische Koordinaten (Ursprung in Plattenmittelfläche)
$\alpha(t)$	Gegenseitige Annäherung der Stoßpartner nach Stoßbeginn
$\dot{\alpha}(t)$	$d\alpha/dt$
$\ddot{\alpha}(t)$	$d^2\alpha/dt^2$
α_{max}	Maximale gegenseitige Annäherung
α_{rem}	Bleibende gegenseitige Annäherung
α_T	Bleibende Kratertiefe
α_p	Plattenparameter
β	$\pi^2/R^2\,(B/\varrho_p h)^{0,5}(t-t')$
β_p	$1/(2\pi\varrho_p h)(\varrho_p h/B)^{0,5}$
γ_{xy}	Scherung
δA^*	Virtuelle Arbeit
Δ	Laplacescher Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
∇	Hamiltonoperator $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$
ε_x, ε_y ε_r, ε_φ	Dehnungen
$\varepsilon_o(t)$	Zeitlicher Biegedehnungsverlauf an der Plattenunterseite unter dem Stoßpunkt
$\varepsilon_{axial}(t)$	Gemessener zeitlicher Axialdehnungsverlauf unter der Stoßstelle (in radialer Richtung)
λ	Stoßkennzahl

ν_p, ν_K	Poissonsche Konstante des Platten- bzw. Kugelmaterials
π	Kreiszahl
ϱ_r	Krümmungsradius der Plattenmittelfläche
ϱ_p, ϱ_K	Dichte des Platten- bzw. des Kugelmaterials
σ_x, σ_y σ_r, σ_φ	Normalspannungen
$\delta(\tau)$	Dimensionslose Annäherung
$\delta^p(\tau)$	Dimensionslose Stoßkraft
δ^p_B, δ^p_E	Dimensionslose Stoßkraft für die Belastungs- bzw. Entlastungsphase
δ_{max}	Maximale dimensionslose Annäherung
δ_{rem}	Bleibende dimensionslose Annäherung
δ^p_{max}	Maximale dimensionslose Stoßkraft
τ_{xy}	Schubspannung
τ, τ'	Dimensionslose Zeitveränderliche
τ_o	t_o/T_R
$\tau_{\delta^p_{max}}$	Zeitpunkt maximaler dimensionsloser Stoßkraft
φ	Winkelkoordinate
ω_n	Eigenfrequenzen der Platte
ω_{1exp} ω_{1theo}	Eigenfrequenz der Grundschwingung experimentell bzw. theoretisch ermittelt

1. Einleitung

Schlagartig belastete Bauteile wie z. B. Balken und Platten erfahren kurzzeitig beachtliche mechanische Beanspruchungen /1/, /2/, /6/, /10/, die sich im allgemeinen nur mit einem großen Rechenaufwand bestimmen lassen. Die Stoßkörper, in diesem Falle Kugel und Platte, treten dabei nur kurzzeitig in Wechselwirkung miteinander, wobei beim Aufprall eine Verzögerung der Stoßmasse und somit eine beachtliche Stoßkraft entsteht, die die Platte vorherrschend zu Biegeschwingungen anregt.

Die Stoßmasse bleibt nur für eine kurze Zeit, der sogenannten Kontaktzeit, mit der Platte in Berührung, wobei die Stoßkraft im allgemeinen ein Vielfaches des Gewichts der Stoßkugel beträgt /27/. Von der Stoßstelle breiten sich elastische Wellen verschiedenster Art aus, von denen, wie durch Versuche /59/, /75/ bestätigt, vorherrschend Biegewellen /56/ den Energietransport übernehmen. Während der Kontaktwechselwirkung bilden die dicht unter der Kontaktstelle auftretenden und zur Plattenunterseite laufenden Kompressionswellen in Verbindung mit dem Biegezustand einen räumlichen Spannungszustand, dessen örtliche Verteilung einer statischen Einzelkraft ähnlich ist /27/.

Wie umfangreiche Untersuchungen /26/, /31/, /32/ gezeigt haben, hat beim transversalen Plattenstoß die maximale Beanspruchung zeitlich vor dem Eintreffen der von der Platteneinspannung reflektierten elastischen Wellen am Stoßort stattgefunden. Die Dauer dieses Stadiums, das im folgenden als Frühstadium bezeichnet wird, läßt sich für die zu untersuchenden Platten schnell abschätzen /56/, wenn die geometrischen Abmessungen, elastischen Konstanten und Dichten der

Plattenmaterialien bekannt sind.

Die Abschätzung der Laufzeit erfolgt aus der Geschwindigkeit der Biegewellen sehr kleiner Wellenlänge /29/ $c_B \approx 0{,}93\ (G_p/\varrho_p)^{0,5}$ und der Laufstrecke der Wellen vom Stoßpunkt zur Platteneinspannung und zurück. Der zur Berechnung der Biegewellengeschwindigkeit benötigte Faktor 0,93 hängt von der Poissonschen Konstanten des Plattenmaterials ab. Er ist für die hier verwendeten Plattenmaterialien (Messing und Aluminium) nahezu gleich. In vielen Versuchen, die zur Untersuchung der kurzzeitigen Wechselwirkungen, des Kontaktverhaltens und zur Parameterbestimmung der Kontaktkraftgesetze dienten, ist die Laufzeit der Biegewellen immer größer als der Zeitpunkt maximaler Belastung. Dieses führt zu einer Unabhängigkeit von den Randbedingungen /56/, /59/ für die maximale Beanspruchung und hat zur Folge, daß die unter der Stoßstelle auftretende Durchbiegung nicht, wie sonst üblich, durch eine schlecht konvergierende Reihenentwicklung, sondern durch eine einfach zu berechnende Integralbeziehung beschrieben werden kann. Dieser Ersatz vereinfacht die Stoßtheorie erheblich, da nun keine Eigenfunktionen, Eigenfrequenzen und Längsdimensionen der Platte auftreten und wird nicht zuletzt wegen der großen Rechenzeitersparnis auf elektronischen Rechenanlagen für die Dauer des Frühstadiums als ein brauchbares Äquivalent für die sonst benutzte Reihendarstellung der zentralen Durchbiegung angesehen.

Läßt man die Querkraftdeformation, die Rotationsträgheit der Plattenelemente sowie irgendwelche Dämpfungen /84/ unberücksichtigt, so kann man die Plattenschwingung durch eine einfache Differentialgleichung beschreiben. Mit Hilfe der vereinfachten Lösung dieser Differentialgleichung, der Bewegungsgleichung für die

Stoßmasse und den elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzen läßt sich dann eine nichtlineare Differentialgleichung für die gegenseitige Annäherung der Stoßpartner aufstellen und durch geeignete mathematisch-numerische Verfahren die Stoßkraft in ihrem zeitlichen Verlauf berechnen. Unter der oben erwähnten gegenseitigen Annäherung der Stoßpartner ist die Differenz der Schwerpunktsverschiebungen von Stoßkugel und gestoßenem Plattenelement zu verstehen. Als Ergebnis erhält man dimensionslose Stoßkraftkurven, die jeweils durch eine Stoßkennzahl charakterisiert sind. Diese dimensionslose Stoßkraft wird dann auch dazu benutzt, die dimensionslose Durchbiegung und das dimensionslose zentrale Biegungsmoment zu berechnen. Wie schon in ähnlicher Form bei elastischer Kontaktwechselwirkung gehandhabt /26/, /27/, /56/, so ermöglicht auch hier das zur Verfügung gestellte Kurvenmaterial in einfacher Weise eine Berechnung oben angeführter Belastungsgrößen. Man kann diese Berechnungen, da es sich hier um elasto-plastisches Kontaktverhalten handelt, allerdings nur durchführen, wenn man für die gewählte Stoßkombination jeweils die Parameter der zugehörigen Kontaktkraftgesetze zur Verfügung hat. Diese Parameter lassen sich für jede gewünschte Stoßkombination in systematischer Weise nach dem hier beschriebenen experimentell-numerischen Verfahren bestimmen, wobei in dieser Arbeit die Ergebnisse der Stoßkombinationen Stahl-Messing und Stahl-Aluminium vorgestellt werden. Die Parameter werden hier direkt über den aus der schlagartigen Beanspruchung resultierenden, experimentellen Stoßkraftverlauf ermittelt. Im Gegensatz dazu werden in anderen Arbeiten /10/, /24/ die Parameter der Kontaktkraftgesetze durch statische Versuche (Kugel - unendlicher Halbraum) ermittelt. Die Nachteile dieser oben zitierten Arbeiten liegen darin, daß die dort verfolgte Methode der Parameterbestimmung Einflüsse, die

aus der dynamischen Belastung der Platte resultieren, nicht erfassen kann. Es ist an dieser Stelle wichtig zu erwähnen, daß die zur Beschreibung der elasto-plastischen Stoßwechselwirkung benutzten Ansätze der Kontaktkraftgesetze für die Belastungsphase und für die Entlastungsphase wegen des unterschiedlichen Kontaktverhaltens verschieden sind. Unter der Belastungsphase versteht man den Eindringvorgang der Kugel, die hier eine relativ geringe elastische Abplattung erfährt, in das unter der Stoßstelle befindliche Plattenelement bis zur maximalen Annäherung der Stoßpartner. Während dieser Phase findet eine elasto-plastische Stoßwechselwirkung statt. Die Entlastungsphase beschreibt das Stoßgeschehen vom Maximum der gegenseitigen Annäherung bis zu einer bleibenden Annäherung. Dieser in entgegengesetzter Richtung laufende Prozeß zeigt elastisches Verhalten. Die geometrischen Abmessungen des nach dem Stoßvorgang verbleibenden Kraters können zum Teil eine Information über die Art der stattgefundenen Kontaktwechselwirkung geben. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die elasto-plastische Verformung im Sinne der hier vorgestellten Theorie nur an der Kontaktstelle auftreten soll, die Platte in ihrer Gesamtheit aber elastisch verformt wird.

Aus gemessenen Stoßkraftverläufen und der daraus über eine Integralbeziehung berechenbaren gegenseitigen Annäherung werden mittels der Methode des Minimums der Fehlerquadratsumme die Parameter der dynamischen elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze bestimmt und deren Abhängigkeit von Stoßmasse und Stoßgeschwindigkeit untersucht. Mit einer eigens für diesen Zweck entwickelten Versuchsapparatur (siehe Kap. 8) und durch die automatisch ablaufende Versuchsauswertung (siehe Kap. 9) besteht die Möglichkeit einer effektiven systematischen Untersuchung des Plattenstoßes. Um einen umfassenderen

Einblick in das Stoßgeschehen zu bekommen, werden neben der Stoßkraft die Axialdehnung und die Durchbiegung unter dem Stoßpunkt gemessen und mit den Aussagen einer hier vorgestellten vereinfachten Stoßtheorie verglichen.

Eine grundsätzliche Aufgabe dieser Arbeit besteht außerdem darin, für die Stoßkombinationen Stahl-Messing bzw. Stahl-Aluminium zu untersuchen, in welchem Bereich der Stoßenergie die hier verwendeten Kontaktkraftgesetze für schlagartige Beanspruchung mit elasto-plastischer Stoßwechselwirkung Gültigkeit besitzen. Dazu wird der Versuch unternommen, den Bereich der Aufprallenergie bzw. der Stoßgeschwindigkeit abzuschätzen, in dem die elasto-plastische Verformung nicht mehr auf die Kontaktstelle begrenzt, sondern auf eine Zone um den Krater verteilt auftritt.

Neben den Plattenuntersuchungen werden ferner Versuche unternommen, bei denen die Kugel gegen einen unendlichen Halbraum, hier kurz als Block bezeichnet, stößt. Der Grund dieser Versuchserweiterung liegt darin, einerseits den Grenzfall der unendlich dicken Platte zu untersuchen und andererseits den Nachweis zu erbringen, daß im Gegensatz zur Meinung anderer Autoren /10/, /24/ die Parameter des Blockstoßes nicht für den transversalen Stoß auf eine Platte benutzt werden können. Schon aus physikalischen Gesichtspunkten ist zu erwarten, daß der Stoß auf einen unendlichen Halbraum nicht zuletzt wegen des fehlenden Durchbiegungsanteils andere Parameter der Kontaktkraftgesetze liefert als der Stoß auf nachgiebige Strukturen wie z. B. Platten.

Weiterhin diente eine Untersuchung der Kinematik der Stoßpartner /57/ beim Platten- wie beim Blockstoß dazu, einen besseren Einblick in den zeitlichen Verlauf der stattgefundenen Kontaktwechselwirkung zu bekommen.

2. Vereinfachte Darstellung der Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt

Die Differentialgleichung der elastischen Fläche W(x,y,t) einer Platte, die durch eine zeitabhängige Kraft $\bar{q}(x,y,t)$ belastet wird, in der die Rotationsträgheit und die Querkraftdeformation der Plattenelemente, sowie die Normalspannung in z-Richtung, nicht aber irgendwelche Dämpfungen berücksichtigt werden, lautet /84/

$$\left(\nabla^2 - \frac{\varrho_p}{G_p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(B\nabla^2 - \frac{\varrho_p h^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) W + \varrho_p h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{B\nabla^2}{G_p h} + \frac{\varrho_p}{2G_p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \bar{q}(x,y,t). \qquad 2.1$$

Unter Vernachlässigung der Rotationsträgheit wird Gl. 2.1 zu

$$B\left(\nabla^2 - \frac{\varrho_p}{G_p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\nabla^2 W + \varrho_p h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{B\nabla^2}{G_p h}\right) \bar{q}(x,y,t). \qquad 2.2$$

Wird nun auch der Einfluß der Querkraftdeformation vernachlässigt, so ergibt sich mit der aus der Operatorenrechnung bekannten Beziehung

$$\nabla^2 W = \Delta W \qquad 2.3$$

eine einfache inhomogene Differentialgleichung 4. Ordnung, in der die Durchbiegung W nur der Wirkung des Biegungsmomentes zuzuordnen ist

$$B\Delta\Delta W + \varrho_p h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \bar{q}(x,y,t). \qquad 2.4$$

Da die Versuche an Kreisplatten durchgeführt werden und die Belastung, sowie die Lagerung rotationssymmetrisch ist, erscheint es sinnvoll, die Plattenschwingungsgleichung in Polarkoordinatenschreibweise

(siehe Bild 2.1) darzustellen. Dieses kann entweder über Gleichgewichtsbedingungen, wobei wegen der rotationssymmetrischen Belastung alle Ableitungen nach φ gleich Null sind, oder direkt über die für diesen speziellen Fall gültigen Transformationsgleichungen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} \qquad 2.5$$

bzw.

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\,\frac{\partial}{\partial r} \qquad 2.6$$

erfolgen. Die Plattengleichung in Polarkoordinaten lautet dann

$$B\,\Delta\Delta W + \varrho_p h\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \bar{q}(r,t) \qquad 2.7$$

mit

$$B = \frac{E_p h^3}{12\,(1-\nu_p^2)} \qquad 2.8$$

als Biegungssteifigkeit der Platte.
In Bild 2.2 sind die Stoßverhältnisse schematisch dargestellt. Hier trifft eine kugelförmige Stoßmasse m_K auf die Mitte einer am Rand festeingespannten Kreisplatte. Die bei dieser Wechselwirkung entstehende Stoßkraft F(t) regt die Platte vorherrschend zu Biegeschwingungen an. Diese so erzwungene Plattenschwingung wird für das im vorliegenden Fall rotationssymmetrische Problem durch Gl. 2.7 beschrieben.

Man kann nun neben anderen Ansätzen /6/, /26/ für diese Art von Differentialgleichung nach /10/, /57/ folgenden Lösungsansatz verwenden

$$W(r,t) = \sum_{n=1,2,3.}^{\infty} g_n(r)\, f_n(t)\ . \qquad 2.9$$

Zur Bestimmung der im Lösungsansatz (Gl. 2.9) neben der Eigenfunktion $g_n(r)$ auftretenden Zeitfunktion $f_n(t)$ wird hier die Lagrangesche Gleichung zweiter Art in Anlehnung an /10/, /11/ benutzt

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_n}\right] - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_n} = Q_n \quad . \tag{2.10}$$

Die Kräfte Q_n entsprechen den dabei generalisierten nichtkonservativen Kräften im System /88/. Als generalisierte Koordinaten q_n werden hier die Zeitfunktionen $f_n(t)$ gewählt. Um die Differentialgleichung der elastischen Fläche für eine äußere Einzelkraft $F(r,t)$ lösen zu können, d.h. die Singularität der Punktbelastung auszuschalten, denkt man sich die Flächenlast $\bar{q}(r,t)$ an der Stoßstelle mit einem konstanten Betrag $\bar{q}(0,t)$ über eine kleine Fläche dA verteilt wirksam[+)]

$$\bar{q}(0,t)\,dA = F(0,t) = F(t) \quad . \tag{2.11}$$

Die oben erwähnte generalisierte Kraft Q_n läßt sich nun aus der virtuellen Arbeit der Stoßkraft F(t) an der Kontaktstelle wie folgt gewinnen

$$\delta A^*(0,t) = F(t)\,\delta W(0,t) \quad . \tag{2.12}$$

Mit der virtuellen Verschiebung

$$\delta W(0,t) = \delta f_n(t)\, g_n(0) \tag{2.13}$$

und den Beziehungen aus Gl. 2.11 wird

$$F(t)\, g_n(0)\, \delta f_n(t) = Q_n\, \delta f_n(t) \quad , \tag{2.14}$$

so daß man für die generalisierte Kraft folgenden Ausdruck erhält

$$Q_n = F(t)\, g_n(0) \quad . \tag{2.15}$$

[+)] Andere Möglichkeit siehe /6/, dort wird die Flächenlast mit Hilfe der Dirac-Delta-Funktion und eines Grenzüberganges mit einer Einzellast in Verbindung gebracht.

Die kinetische Energie einer Platte konstanter Dicke h ist /11/

$$T = \frac{h}{2} \int_{A_P} \varrho_P \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dA_P \quad . \qquad 2.16$$

Für eine Kreisplatte wird aus Gl. 2.16

$$T = \frac{\varrho_P h}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varphi \, r \, dr \quad , \qquad 2.17$$

und für eine im Mittelpunkt r=0 belastete Kreisplatte ist

$$T = \pi \varrho_P h \int_0^R \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 r \, dr \quad . \qquad 2.18$$

Die Verformungsenergie einer Platte konstanter Dicke h kann unter Vernachlässigung der Querkraftschubspannungen, d.h. $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, und der Normalspannung in z-Richtung, d.h. $\sigma_z = 0$, wie folgt geschrieben werden /11/

$$V = \frac{h}{2} \int_{A_P} \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}\right) dA_P \quad . \qquad 2.19$$

Mit den Spannungs-Dehnungs-Gleichungen /9/ und der Einschränkung, daß es sich um eine am Rand eingespannte Platte handelt, wird aus Gl. 2.19

$$V = \frac{B}{2} \int_{A_P} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 dA_P \quad ^{+)} \qquad 2.20$$

Über die Transformationsgleichung (Rotationssymmetrie)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \qquad 2.21$$

erhält man für die potentielle Energie einer Kreisplatte

$$V = \frac{B}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 d\varphi \, r \, dr \quad . \qquad 2.22$$

Dieser Ausdruck geht bei Rotationssymmetrie bezüglich r=0 in folgende Beziehung

---

+) Weitere Glieder verschwinden bei der hier vorliegenden Randbedingung (siehe hierzu /13/, /90/)

$$V = \pi B \int_0^R \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 r \, dr \qquad 2.23$$

über.

Die Ableitung des Separationsansatzes (Gl. 2.9) nach der Zeit t

$$\dot{W}(r,t) = \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} g_n(r) \dot{f}_n(t) \qquad 2.24$$

liefert eingesetzt in die Beziehung für die kinetische Energie (Gl. 2.18)

$$T = \pi \varrho_p h \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \left[\dot{f}_n(t) \right]^2 \int_0^R g_n^2(r) \, r \, dr \, , \qquad 2.25$$

und die Ableitung von Gl. 2.9 nach der Ortskoordinate r führt zu

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \frac{\partial g_n(r)}{\partial r} f_n(t) \qquad 2.26$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \frac{\partial^2 g_n(r)}{\partial r^2} f_n(t) \, . \qquad 2.27$$

Setzt man die Beziehungen aus Gl. 2.26 und 2.27 in Gl. 2.23 ein, so ist

$$V = \pi B \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} f_n^2(t) \int_0^R \left(\frac{\partial^2 g_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g_n(r)}{\partial r} \right)^2 r \, dr. \qquad 2.28$$

Differenziert man die kinetische und die potentielle Energie entsprechend der Lagrangeschen Gleichung 2. Art so wird

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_n} = 2\pi \varrho_p h \, \dot{f}_n(t) \int_0^R g_n^2(r) \, r \, dr \qquad 2.29$$

+) $\frac{\partial f_i}{\partial \dot{f}_k}$ bzw. $\frac{\partial \dot{f}_i}{\partial f_j} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_n}\right] = 2\pi \varrho_p h \ddot{f}_n(t) \int_0^R g_n^2(r)\, r\, dr , \qquad 2.30$$

$$\frac{\partial T}{\partial f_n} = 0 , \qquad 2.31$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{f}_n} = 0 , \qquad 2.32$$

$$\frac{\partial V}{\partial f_n} = 2\pi B f_n(t) \int_0^R \left(\frac{\partial^2 g_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g_n(r)}{\partial r}\right)^2 r\, dr . \qquad 2.33$$

Sie führen eingesetzt in die Ausgangsgleichung (Gl. 2.10) zu der Beziehung

$$\ddot{f}_n(t) + \frac{B}{\varrho_p h}\,\frac{\int_0^R \left(\frac{\partial^2 g_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g_n(r)}{\partial r}\right)^2 r\, dr}{\int_0^R g_n^2(r)\, r\, dr}\, f_n(t) = \frac{Q_n}{2\pi \varrho_p h \int_0^R g_n^2(r)\, r\, dr} . \qquad 2.34$$

Mit dem in der Schwingungslehre üblichen Ausdruck für die Eigenfrequenz

$$\omega_n = \frac{B}{\varrho_p h}\left[\frac{\int_0^R \left(\frac{\partial^2 g_n(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g_n(r)}{\partial r}\right)^2 r\, dr}{\int_0^R g_n^2(r)\, r\, dr}\right]^{0,5} \qquad 2.35$$

und der generalisierten Kraft Q_n (siehe Gl. 2.15), sowie der Beziehung

$$b_n = \int_0^R g_n^2(r)\, r\, dr \qquad 2.36$$

wird aus Gl. 2.34

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = \frac{F(t)\, g_n(0)}{2\pi \varrho_p h b_n} \quad . \tag{2.37}$$

Diese Differentialgleichung kann unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$f_n(0) = \dot{f}_n(0) = 0 \tag{2.38}$$

mit der Methode der Variation der Konstanten in gewohnter Weise gelöst werden, was zu folgendem Ausdruck führt

$$f_n(t) = \frac{g_n(0)}{2\pi \omega_n \varrho_p h b_n} \int_0^t F(t') \sin \omega_n (t-t')\, dt' \quad . \tag{2.39}$$

Wird diese Zeitfunktion in den Lösungsansatz (siehe Gl. 2.9) eingesetzt, so erhält man

$$W(r,t) = \frac{1}{2\pi \varrho_p h} \sum_{n=1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{\omega_n b_n}\, g_n(r)\, g_n(0) \cdot \int_0^t F(t') \sin \omega_n (t-t')\, dt' \quad . \tag{2.40}$$

Die Eigenfunktion $g_n(r)$ für eine am Rand fest eingespannte Kreisplatte /6/, /10/, /56/ lautet

$$g_n(r) = J_0(p_n r) - \frac{J_0(p_n R)}{I_0(p_n R)}\, I_0(p_n r) \quad , \tag{2.41}$$

wobei $J_0(p_n r)$ Besselfunktionen erster Art nullter Ordnung mit reellem Argument und $I_0(p_n r)$ Besselfunktionen erster Art nullter Ordnung mit imaginärem Argument bedeuten /15/, /52/.
Mit dem Ausdruck

$$b_n = \int_0^R g_n^2(r)\, r\, dr = R^2 J_0^2(p_n R) \tag{2.42}$$

und für den Plattenmittelpunkt r=0 bekommt Gl. 2.40

die Form

$$W(0,t) = \frac{1}{2\pi \varrho_p h R^2} \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(p_n R)\,\omega_n}\; g_n^2(0) \cdot \int_0^t F(t') \sin \omega_n (t-t')\, dt' \,. \qquad 2.43$$

Weiterhin gilt, daß an der Stelle r=0

$$J_0(p_n r) = I_0(p_n r) = 1 \qquad 2.44$$

und somit

$$g_n^2(0) = \left[1 - \frac{J_0(p_n R)}{I_0(p_n R)}\right]^2 \qquad 2.45$$

ist (siehe dazu /52/, /55/) und in Gl. 2.43 eingesetzt zu folgendem Ausdruck für die Durchbiegung führt

$$W(0,t) = \frac{1}{2\pi \varrho_p h R^2} \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{1}{J_0(p_n R)} - \frac{1}{I_0(p_n R)}\right]^2 \cdot \int_0^t F(t') \sin \omega_n (t-t')\, dt' \,. \qquad 2.46$$

Die Werte für $p_n R$ erhält man aus der transzendenten Frequenz- oder Eigenwertgleichung /9/, /15/

$$\frac{J_1(p_n R)}{J_0(p_n R)} + \frac{I_1(p_n R)}{I_0(p_n R)} = 0 \,, \qquad 2.47$$

deren Lösungen bekannt und aus Tab. 1 für n = 1-12 ersichtlich sind. Für $n \geq 10$ ist

$$(p_n - p_{n-1}) R \approx \pi \qquad 2.48$$

bzw.

$$p_n R = n\pi \,. \qquad 2.49$$

Nach der Theorie der Besselfunktionen /52/ kann man den in Gl. 2.46 stehenden Klammerausdruck annähernd (≈4% Fehler) durch eine trigonometrische Funktion ersetzen, die dann für $n \geq 10$ in eine lineare Beziehung übergeht

$$\left[\frac{1}{J_0'(\beta_n R)} - \frac{1}{I_0'(\beta_n R)}\right]^2 \approx \frac{\pi(\beta_n R)}{2\cos^2(\beta_n R - \pi/4)} \approx n\pi^2, \qquad 2.50$$

und mit den Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_n = \beta_n^2 \left(\frac{B}{\vartheta_p h}\right)^{0,5} \qquad 2.51$$

sowie der Gl. 2.49 und Gl. 2.50 bekommt man

$$\frac{1}{\omega_n}\left[\frac{1}{J_0'(\beta_n R)} - \frac{1}{I_0'(\beta_n R)}\right]^2 \approx \frac{R^2}{n}\left(\frac{\vartheta_p h}{B}\right)^{0,5}, \qquad 2.52$$

was in die Durchbiegungsfunktion des Plattenmittelpunktes eingesetzt folgenden Zusammenhang ergibt

$$W(0,t) = W_0(t) = \frac{1}{2\pi\vartheta_p h}\left(\frac{\vartheta_p h}{B}\right)^{0,5} \cdot \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^t F(t')\sin\beta n^2\, dt' \qquad 2.53$$

mit

$$\beta = \frac{\pi^2}{R^2}\left(\frac{B}{\vartheta_p h}\right)^{0,5}(t-t'). \qquad 2.54$$

Im Sinne einer Vereinfachung der Stoßtheorie wird nun die in Gl. 2.53 auftretende unendliche Reihe

$$S = \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\beta n^2, \qquad 2.55$$

die hier um den Summanden (n=0) erweitert wurde, durch ein uneigentliches Integral ersetzt. Der Summenwert ändert sich dadurch nicht, da für n=0 der erste Summand gegen Null geht, wie sich durch eine Grenzwertbetrachtung für unbestimmte Ausdrücke (Regel von

de l' Hospital) leicht zeigen läßt. Diese Erweiterung ist aber notwendig, da die untere Grenze des die unendliche Summe ersetzenden Integrals gleich Null ist. Um die Reihe durch ein Integral ersetzen zu können, muß erst gewährleistet sein, daß

$$\sum_{n=0,1,2,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t F(t') \sin\beta n^2 \, dt' = \int_0^t F(t') \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\beta n^2 \, dt' \qquad 2.56$$

ist.

Diese Aussage gilt aber zunächst nur für die hier untersuchten Stoßverhältnisse bzw. für die hier auftretenden Stoßkraftverläufe F(t´). Der Beweis, daß obige Beziehung unter Berücksichtigung eben erwähnter Einschränkungen Gültigkeit besitzt, wurde erbracht, indem auf beiden Seiten der Gl. 2.56 ein experimentell ermittelter Stoßkraftverlauf F(t´) eingesetzt wurde (siehe Bild 2.5 und 2.6).

Stellt man sich die einzelnen Glieder der Reihe (siehe Gl. 2.55) als Amplitudenwerte über einer n-Geraden aufgetragen vor, wie in Bild 2.3 dargestellt, so kann man nach Multiplikation dieser Amplitude mit der Grundlinie $\Delta n = 1$ diese Reihe als die Aufsummierung der Flächeninhalte einzelner Rechtecke auffassen. Wird nun die Summe der Rechtecke gleich dem Integralausdruck gesetzt, wobei n in eine kontinuierlich Veränderliche übergeht, so wird

$$\sum_{n=0,1,2,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\beta n^2 \Delta n \approx \int_0^{\infty} \frac{1}{n} \sin\beta n^2 \, dn . \qquad 2.57$$

Über die Substitution

$$\beta n^2 = u \qquad 2.58$$

bekommt man nach /53/ für den Integralausdruck

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \, du = \frac{\pi}{4} , \qquad 2.59$$

so daß man mit dieser Näherung für die unendliche Reihe einen einfachen Ausdruck erhält. Die Plattendurch-

biegung unter dem Stoßpunkt kann nun wie folgt geschrieben werden

$$W_o(t) = \alpha_p \int_0^t F(t')\,dt' \qquad 2.60$$

mit

$$\alpha_p = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\varrho_p h B}\right)^{0,5} \qquad 2.61$$

als Plattenparameter. Diese einfache Beziehung für die Durchbiegung wurde schon früher für quadratische Platten unterschiedlicher Einspannbedingungen /26/, /27/ hergeleitet.

In Bild 2.4 sind die aus Gl. 2.60 mittels theoretischem Stoßkraftverlauf (siehe Kap. 4) errechneten Werte der Durchbiegung unter der Kontaktstelle W_o der Materialkombinationen Stahl-Messing bzw. Stahl-Aluminium für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten v_o als Funktion der Zeit aufgetragen.

Aus Gl. 2.60 ist ersichtlich, daß der hier abgeleitete Ausdruck für die Durchbiegung eines unter der Stoßstelle befindlichen Plattenelements dem Zeitintegral der Stoßkraft proportional, vom Plattenradius, sowie von den Eigenfrequenzen, den Eigenfunktionen und somit von den Randbedingungen unabhängig ist. An dieser Stelle sei erwähnt, daß schon J.N. Boussinesq /3/ und danach C. Zener /4/ diese einfache Beziehung auf andere Art und Weise hergeleitet haben. Betrachtet man nun an Hand der Bilder 2.5 und 2.6 den Vergleich des Reihenausdrucks aus Gl. 2.55 mit dem Integralausdruck aus Gl. 2.59, so sieht man, daß die unendliche Reihe mit größer werdender Zeitdifferenz (t-t') immer schneller gegen den Integralwert von $\pi/4$ konvergiert (siehe Bild 2.5). Diese Tatsache führt zu den Überlegungen von B. Schmidt /28/,

der Untersuchungen an einem transversal gestoßenen Balken durchgeführt hat, daß offenbar nur noch die untersten Eigenfrequenzen nennenswerte Beiträge zum Gesamtsummenwert leisten.

Obwohl die Kontaktzeiten t_{K1}, d.h. jeweils die Dauer der ersten Kontaktwechselwirkung, der untersuchten Stoßkombinationen Stahl-Messing bzw. Stahl-Aluminium ca. 250 µs für den kleinsten Kugeldurchmesser (d_K=50,8 mm) bis ca. 1050 µs für den größten verwendeten Kugeldurchmesser (d_K=80 mm) betrugen, stimmen die über das uneigentliche Integral (siehe Gl. 2.60) errechneten mit den über die unendliche Reihe (siehe Gl. 2.53) errechneten zeitlichen Durchbiegungsverläufen $W_o(t)$ mit zunehmenden n-Werten (siehe Bild 2.7) gut überein. Diese Übereinstimmung der mit Hilfe eines experimentell ermittelten Stoßkraftverlaufs der Stoßkombination Stahl-Messing (v_o=1,50 m/s; d_K=80 mm) errechneten Durchbiegungskurven ist darauf zurückzuführen, daß die kleinen Zeitdifferenzen (t-t´) im gesamten Berechnungsvorgang häufiger auftreten als die größeren Zeitdifferenzen (t-t´) zu Kontaktende.

An dieser Stelle sei ebenfalls erwähnt, daß der Ersatz durch das uneigentliche Integral neben der bedeutend einfacheren mathematischen Handhabung noch den Vorteil der erheblichen Rechenzeiteinsparung auf EDV-Anlagen bietet. So betrug die Rechenzeit einer Durchbiegungsfunktion, die mit Hilfe des vereinfachten Ausdrucks berechnet wurde, nur ≈ 5 % von der, die über die unendliche Reihe (n=100) bestimmt wurde. Die für die Berechnung des Durchbiegungsverlaufes notwendige Stoßkraft F(t´) erhält man, wie in Kap. 4 eingehend beschrieben, über eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Durch Einführung der in Kap. 4 ausführlich hergeleiteten dimensionslosen Stoßkräfte δ_B^p für die Belastung bzw. δ_E^p für die Entlastung sowie der dimensionslosen

Zeitveränderlichen τ und unter der Benutzung der Parameter der elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze (siehe Kap. 5) erhält man für die Durchbiegung unter dem Stoßpunkt im Bereich der Belastungsphase ($0 \leq \tau \leq \tau_{\delta^p_{max}}$)

$$W_o(t) = \alpha_p \bar{N} V_o^p T_R^{p+1} \int_0^{\tau} \dot{\sigma}_B^p(\tau')\, d\tau' \qquad 2.62$$

und für den Bereich der Entlastungsphase ($\tau_{\delta^p_{max}} \leq \tau \leq \tau_{\delta_{rem}}$)

$$W_o(t) = \alpha_p \bar{N} V_o^p T_R^{p+1} \left\{ \int_0^{\tau_{\delta^p_{max}}} \dot{\sigma}_B^p(\tau')\, d\tau' + \int_{\tau_{\delta^p_{max}}}^{\tau} \dot{\sigma}_E^p(\tau')\, d\tau' \right\}. \qquad 2.63$$

Die Integralausdrücke

$$W^*_{oB}(\tau) = \int_0^{\tau} \dot{\sigma}_B^p(\tau', \lambda, p)\, d\tau' \qquad 2.64$$

und

$$W^*_{oE}(\tau) = \int_0^{\tau_{\delta^p_{max}}} \dot{\sigma}_B^p(\tau', \lambda, p)\, d\tau' + \int_{\tau_{\delta^p_{max}}}^{\tau} \dot{\sigma}_E^p(\tau', \lambda, p, q, \dot{\sigma}_{rem})\, d\tau' \qquad 2.65$$

werden als dimensionslose Plattendurchbiegungen bezeichnet. In den Bildern 2.8 - 2.10 sind einige $W^*_o(\tau)$-Kurven für verschiedene Stoßexponenten p und Stoßkennzahlen λ wiedergegeben.

3. Vereinfachte Darstellung des Biegungsmomentes unter dem Stoßpunkt

Für das radiale Biegungsmoment m_r [+)] und das tangentiale Biegungsmoment m_φ [+)] (siehe Bild 2.1) gilt

$$m_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r \, z \, dz \,, \qquad 3.1$$

$$m_\varphi = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi \, z \, dz \,, \qquad 3.2$$

wobei mit σ_r bzw. σ_φ die Normalspannungen bezeichnet werden, die in der Richtung r bzw. dazu senkrecht im Abstand z von der Mittelfläche der Platte parallel zu dieser letzteren wirken.

Die Dehnungen errechnen sich für den rotationssymmetrischen Spannungszustand aus

$$\varepsilon_r = - z \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \,, \qquad 3.3$$

$$\varepsilon_\varphi = - \frac{z}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \qquad 3.4$$

und ergeben eingesetzt in das allgemeine Hooke'sche Elastizitätsgesetz folgende Ausdrücke für die tangentiale und radiale Biegespannung

$$\sigma_r = - \frac{E_p z}{1 - \nu_p^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu_p}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \,, \qquad 3.5$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{E_p z}{1 - \nu_p^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \nu_p \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right) . \qquad 3.6$$

Setzt man die Biegespannungen in Gl. 3.1 und 3.2 ein,

[+)] m_r bzw. m_φ sind die auf die Schnittlängeneinheit bezogenen Momente der Normalspannungen σ_r bzw. σ_φ

$$m_r = -B\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu_p}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right), \qquad 3.7$$

$$m_\varphi = -B\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \nu_p \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right). \qquad 3.8$$

In der Plattenmitte (r=0) ist

$$m_r = m_\varphi \qquad 3.9$$

und somit ist an der Stelle r=0 unter Benutzung von Gl. 3.7 und Gl. 3.8

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}. \qquad 3.10$$

Dieser Ausdruck ergibt eingesetzt in Gl. 3.9 für r=0

$$m_r = m_\varphi = -B\,(1+\nu_p)\,\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}. \qquad 3.11$$

In obiger Beziehung stellt der Ausdruck $\partial^2 w/\partial r^2$ die Krümmung der Plattenmittelfläche dar, da die allgemeine Gleichung für die Krümmung

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad 3.12$$

an der Stelle r=0 wegen

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \qquad 3.13$$

in den Ausdruck

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \qquad 3.14$$

übergeht. Die zentrale Krümmung erhält man in Anlehnung

an /26/, /55/ durch zweimalige Ableitung der Durchbiegungsfunktion (siehe Gl. 2.40) an der Stelle r=0 nach der Ortskoordinate r - rotationssymmetrischer Spannungszustand vorausgesetzt - wie folgt

$$\left(\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}\right)_{r=0} = \frac{1}{2\pi R^2 \varrho_p h} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\omega_n J_0^2(p_n R)} \cdot \left(\frac{\partial^2 g_n(r)}{\partial r^2}\right)_{r=0} g_n(0) \int_0^t F(t') \sin \omega_n (t-t')\, dt' . \qquad 3.15$$

Setzt man die zweite Ableitung der Eigenfunktion /10/

$$\left(\frac{\partial^2 g_n(r)}{\partial r^2}\right)_{r=0} = -\frac{p_n^2}{2}\left[1 + \frac{J_0(p_n R)}{I_0(p_n R)}\right] \qquad 3.16$$

und die Eigenfunktion selbst (siehe Gl. 2.45)

$$g_n(0) = \left[1 - \frac{J_0(p_n R)}{I_0(p_n R)}\right] \qquad 3.17$$

in die Ausgangsgleichung (Gl. 3.15) ein, so wird

$$\left(\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}\right)_{r=0} = -\left(\frac{1}{\varrho_p h B}\right)^{0,5} \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{J_0^2(p_n R)} - \frac{1}{I_0^2(p_n R)}\right] \int_0^t F(t') \sin \omega_n (t-t')\, dt' . \qquad 3.18$$

Durch die Beziehung der Besselfunktionen /52/ +)

$$\frac{1}{J_0^2(p_n R)} - \frac{1}{I_0^2(p_n R)} \approx \frac{\pi (p_n R)}{2\cos^2(p_n R - \pi/4)} \approx n\pi^2 \qquad 3.19$$

bekommt Gl. 3.18 folgende Gestalt

$$\left(\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}\right)_{r=0} = -\frac{\pi}{4R^2}\left(\frac{1}{\varrho_p h B}\right)^{0,5} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} n \int_0^t F(t') \sin \beta n^2 dt' \qquad 3.20$$

mit

$$\beta = \frac{\pi^2}{R^2}\left(\frac{B}{\varrho_p h}\right)^{0,5} (t-t') \quad , \qquad 3.21$$

+) mit steigendem $p_n R$ geht der Klammerausdruck aus Gl. 3.18 in den von Gl. 2.46 über (siehe S. 23)

wobei darauf zu achten ist, daß die Laufvariable von n=1 auf n=0 herabgesetzt wird, was den Wert des Summenausdrucks nicht beeinflußt, im Sinne der Aufgabenstellung aber den Ersatz der unendlichen Reihe durch ein uneigentliches Integral ermöglicht. Unter der Voraussetzung, daß

$$\sum_{n=0,1,2}^{\infty} n \int_0^t F(t') \sin\beta n^2 dt' = \int_0^t F(t') \sum_{n=0,1,2,\cdots}^{\infty} n \sin\beta n^2 dt' \qquad 3.22$$

(siehe hierzu auch S. 24) ist , wird

$$\sum_{n=0,1,2,\cdots}^{\infty} n \sin\beta n^2 \Delta n \approx \int_0^{\infty} n \sin\beta n^2 dn . \qquad 3.23$$

Durch die Umformung des Integralsausdruckes nach /55/

$$\int_0^{\infty} n \sin\beta n^2 dn = \lim_{\mu \to 0} \int_0^{\infty} n^{(1-2\mu)} \sin\beta n^2 dn \qquad 3.24$$

und die Substitution

$$\beta n^2 = u \qquad 3.25$$

wird

$$\int_0^{\infty} n \sin\beta n^2 dn = \frac{1}{2\beta} \lim_{\mu \to 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u^{\mu}} du . \qquad 3.26$$

Da

$$\lim_{\mu \to 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u^{\mu}} du = 1 \qquad 3.27$$

ist, erhält man für das uneigentliche Integral und somit für die unendliche Reihe

$$\int_0^{\infty} n \sin\beta n^2 dn = \sum_{n=0,1,2}^{\infty} n \sin\beta n^2 = \frac{1}{2\beta} , \qquad 3.28$$

was eingesetzt in die Krümmungsgleichung eine einfache schon von H. Schwieger /26/ für quadratische Platten hergeleitete Beziehung

$$\left(\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}\right)_{r=0} = -\frac{1}{8\pi B}\int_0^{t-t_0}\frac{F(t')}{(t-t')}\,dt' \qquad 3.29$$

ergibt. Zum vereinfachten Ausdruck für das zentrale Biegungsmoment kommt man, indem Gl. 3.29 in die Beziehung aus Gl. 3.11 eingesetzt wird

$$m_r(0,t) = M_0(t) = \frac{1+\nu_p}{8\pi}\int_0^{t-t_0}\frac{F(t')}{(t-t')}\,dt' \quad . \qquad 3.30$$

Wie man sieht, ist dieser Ausdruck, wie der der Durchbiegung unter dem Stoßpunkt (siehe Gl. 2.60), für das Frühstadium ebenfalls unabhängig von den Randbedingungen, wegen der in diesem Ausdruck fehlenden Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen und ebenfalls unabhängig vom Plattenradius.

Die an der Stelle t=t' auftretende Singularität des Integralausdrucks in Gl. 3.29 und 3.30 wurde schon von H. Schwieger /26/ dadurch ausgeschaltet, daß er eine Zeitkonstante t_o definierte, die zu einer oberen Begrenzung des Integrationsbereiches und daher zu einem endlichen Wert des Integrals führte. Es muß nun eine Zeitkonstante t_o bestimmt werden, mit deren Hilfe sich aus Gl. 3.30 ein theoretischer Biegemomentenverlauf errechnen läßt, der mit den experimentellen Werten gut übereinstimmt.

Um bei der Festlegung der Zeitkonstanten t_o auch die jeweiligen Stoßverhältnisse berücksichtigen zu können geht man wie folgt vor. Nimmt man in erster Näherung an, daß die Stoßkraft zum Zeitpunkt t=0 sprunghaft ansteigt, über einen gewissen Zeitraum konstant bleibt, um dann sprunghaft abzufallen (Rechteckimpuls), so bereitet

die Integration des obigen Ausdrucks (siehe Gl. 3.29) keine Schwierigkeiten. Dieses Ergebnis wird einem von I.N. Sneddon /25/ über Hankeltransformationen hergeleiteten aber ebenfalls für einen Rechteckimpuls berechneten Ausdruck[+)] gegenübergestellt. Der Vergleich beider Ausdrücke führt bis auf ein fehlendes additives Glied zu der von I.N. Sneddon abgeleiteten Zeitkonstante

$$t_0 = \frac{r_K^{*2}}{4} \left(\frac{\varrho_0 h}{5} \right)^{0,5} \qquad 3.31$$

Bei elastischer Kontaktwechselwirkung, für die dieser Ausdruck hergeleitet wurde, läßt sich der in dieser Gleichung befindliche, zeitlich veränderliche Kontaktradius leicht aus der Hertzschen Theorie bestimmen /56/.

Um in Anlehnung an das elastische Kontaktverhalten auch für elasto-plastische Kontaktwechselwirkungen eine Zeitkonstante mit Hilfe der Kontaktradien näherungsweise bestimmen zu können, muß man sich des zeitlichen Verlaufs der gegenseitigen Annäherung bedienen. Die relativ geringe Abplattung der Stoßkugel während des Stoßvorganges wird in dieser Überlegung vernachlässigt. Unter dieser in Bild 3.1 dargestellten vereinfachten Annahme läßt sich der Kontaktradius leicht mit Hilfe der Sehnenformel

$$r_K^* = \left(d_K \alpha - \alpha^2 \right)^{0,5} \qquad 3.32$$

errechnen. Der Nachteil dieser Abschätzungsmethode liegt darin, daß der zeitliche Verlauf der gegenseitigen Annäherung bekannt sein muß und die obere Grenze des Integrals (siehe Gl. 3.30) eine Zeitfunktion wird. Dadurch kompliziert sich die numerische Verarbeitung dieser Beziehung erheblich, obwohl das so errechnete Biegungsmoment wie Gegenüberstellungen zeigen gute

---

+) Sneddon /25/ berechnet die Krümmung der Plattenmittelfläche unter Berücksichtigung der Einwirkungsfläche einer "rechteckimpulsartigen" Kraft

Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert zeigt.

Eine andere Möglichkeit zur Abschätzung der Zeitkonstanten, wie beim elastischen Plattenstoß /26/, /27/, /55/ mit Erfolg benutzt, besteht darin, einen fiktiven, zeitlich konstanten Kontaktradius von h/2 zu definieren. Bei dieser Überlegungsweise denkt man sich die Stoßkraft auf eine Kreisfläche der Größe $\pi h^2/4$ in der Mittelebene der Platte verteilt vor. Im Gegensatz zum elastischen Verhalten zeigt der mit Hilfe dieser Zeitkonstante ermittelte Verlauf des Biegungsmomentes bei elasto-plastischer Verformung relativ große Abweichungen vom Experiment (siehe Bild 10.5 und 10.6). Eine vom zeitlichen Verlauf der gegenseitigen Annäherung unabhängige Zeitkonstante t_o und somit eine einfachere mathematische Handhabung, sowie eine gute Übereinstimmung berechneter und experimentell bestimmter Biegungsmomente erhält man, indem der Kontaktradius nach Gl. 3.32 aus dem zeitlichen Mittelwert im Zeitintervall $0 - t_{K1}$ $(0{,}75 \cdot \alpha_{max})$ der gegenseitigen Annäherung $\alpha(t)$ berechnet wird. Die über die theoretischen Stoßkraftverläufe (siehe Kap. 4) errechneten Biegungsmomente der Stoßkombinationen Stahl-Messing und Stahl-Aluminium sind für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten in Bild 3.2 und deren Maxima in Bild 3.3 festgehalten.

Die Biegedehnung ε_o an der Plattenunterseite gegenüber dem Stoßpunkt errechnet sich aus

$$\varepsilon_o(t) = -\frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}\right)_{r=0} , \qquad 3.33$$

so daß man unter Verwendung von Gl. 3.29 für die Biegedehnung unterhalb der Stoßstelle den Ausdruck

$$\varepsilon_o(t) = \frac{h}{16\pi B}\int_{\tau}^{t-t_o}\frac{F(t')}{(t-t')}\,dt' \qquad 3.34$$

erhält.

Wie für die Durchbiegung des gestoßenen Plattenelementes (siehe Kap. 2), so bekommt man für das Biegungsmoment bei Einführung dimensionsloser Zeitveränderlicher für die Belastungsphase ($0 \leq \tau \leq \tau^{p}_{\sigma max}$) die Beziehung

$$M_o(t) = \frac{1+\nu_p}{8\pi}\ \bar{N}(\nu_0, T_R)^p \int_0^{\tau-\tau_o} \frac{\sigma_B^p}{(\tau-\tau')}\, d\tau' \qquad 3.35$$

und für die Entlastungsphase ($\tau^{p}_{\sigma max} \leq \tau \leq \tau_{\sigma rem}$)

$$M_o(t) = \frac{1+\nu_p}{8\pi}\ \bar{N}(\nu_0, T_R)^p \left\{ \int_0^{\tau^{p}_{\sigma max}} \frac{\sigma_B^p}{(\tau-\tau')}\, d\tau' + \int_{\tau^{p}_{\sigma max}}^{\tau-\tau_o} \frac{\sigma_E^p}{(\tau-\tau')}\, d\tau' \right\}. \qquad 3.36$$

In obigen Gleichungen werden die Integralausdrücke

$$M^{*}_{oB}(\tau) = \int_0^{\tau-\tau_o} \frac{\sigma_B^p}{(\tau-\tau')}\, d\tau' \qquad 3.37$$

und

$$M^{*}_{oE}(\tau) = \int_0^{\tau^{p}_{\sigma max}} \frac{\sigma_B^p}{(\tau-\tau')}\, d\tau' + \int_{\tau^{p}_{\sigma max}}^{\tau-\tau_o} \frac{\sigma_E^p}{(\tau-\tau')}\, d\tau' \qquad 3.38$$

als dimensionslose Biegungsmomente für die Belastungs- bzw. Entlastungsphase bezeichnet, deren Maximalwerte $M^{*}_{max}(\lambda)$ für verschiedene dimensionslose Zeitkonstanten τ_o und Stoßexponenten p in Bild 3.4 aufgeführt sind.

4. Differentialgleichung der Stoßkraft und Integralbeziehung für die gegenseitige Annäherung

Nach der Lösung der Plattenschwingungsgleichung für eine transversale stoßartige Belastung, die einen einfachen Ausdruck für die zentrale Plattendurchbiegung hervorbrachte, soll nun die Differentialgleichung für die Stoßkraft /27/, /29/ abgeleitet werden.

Beim transversalen Stoß einer Kugel auf eine Platte ist die Annäherung der Stoßpartner

$$\alpha = w - W_0 \qquad 4.1$$

als Differenz der Schwerpunktsverschiebungen von Stoßmasse und gestoßenem Plattenelement zu verstehen. Die während des Stoßvorganges auf die Platte wirkende Stoßkraft F(t) steht mit der Verzögerung der Stoßmasse in folgendem Zusammenhang

$$F(t) = -m_K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad , \qquad 4.2$$

die zweimal nach der Zeit integriert unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$w(t=0) = 0 \quad , \qquad 4.3$$

$$\dot{w}(t=0) = V_0 \qquad 4.4$$

den Weg der Stoßkugel nach dem Aufprall wie folgt beschreibt

$$w(t) = V_0 t - \frac{1}{m_K} \int_0^{t''=t} \left\{ \int_0^{t'=t''} F(t')\, dt' \right\} dt'' \quad . \qquad 4.5$$

Nach der Umformung des in obiger Gl. 4.5 vorhandenen Doppelintegrals in ein Einfachintegral /83/ erhält man

$$w(t) = V_0 t - \frac{1}{m_K} \int_0^t F(t')\,(t-t')\, dt' \quad . \qquad 4.6$$

Für die Verschiebung des unter der Stoßstelle befindlichen Plattenelementes gilt, wie schon in Kap. 2 gezeigt, die Beziehung

$$W_o(t) = \alpha_P \int_0^t F(t')\,dt' \quad . \tag{4.7}$$

Gl. 4.6 und Gl. 4.7 ergeben eingesetzt in Gl. 4.1

$$\alpha(t) = v_0 t - \frac{1}{m_K} \int_0^t F(t')(t-t')\,dt' - \alpha_P \int_0^t F(t')\,dt' \quad . \tag{4.8}$$

Aus dieser Gleichung kann man mit Hilfe der Stoßkraft den zeitlichen Verlauf der gegenseitigen Annäherung errechnen, die den Eindringvorgang in die Plattenoberfläche und die damit verbundene Abplattung der Stoßkugel charakterisiert. In Bild 4.1 sind die aus den theoretischen Stoßkräften ermittelten gegenseitigen Annäherungen α als Funktion der Zeit t für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten und Stoßkombinationen aufgetragen. Durch zweimalige Differentiation der Integralbeziehung für die gegenseitige Annäherung α nach der Zeit t (siehe Gl. 4.8)

$$\ddot{\alpha} = \ddot{w} - \ddot{W}_o \tag{4.9}$$

erhält man über die Bewegungsgleichung der Kugel (siehe Gl. 4.5)

$$\dot{w} = v_0 - \frac{1}{m_K} \int_0^t F(t')\,dt' \tag{4.10}$$

$$\ddot{w} = -\frac{F}{m_K} \tag{4.11}$$

und über die Bewegungsgleichung des gestoßenen Plattenelementes (siehe Gl. 4.7)

$$\dot{W}_o = \alpha_P F \tag{4.12}$$

$$\ddot{W}_o = \alpha_P \frac{dF}{dt} \tag{4.13}$$

eingesetzt in die Ausgangsgleichung (siehe Gl. 4.9)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{F}{m_K} + \alpha_p \frac{dF}{dt} = 0 \qquad 4.14$$

mit folgenden Anfangsbedingungen

$$\alpha(t=0) = 0 \quad , \qquad 4.15$$

$$\dot{\alpha}(t=0) = V_0 \quad . \qquad 4.16$$

Bei der gesamten Kontaktwechselwirkung muß man, wie anfangs schon erwähnt, aus physikalischen Gründen unterscheiden zwischen dem Belastungsvorgang, welcher durch elasto-plastische Verformungszustände und dem Entlastungsvorgang, welcher durch elastische Verformungszustände charakterisiert ist.

Diese Voraussetzungen haben zur Folge, daß man für beide Abschnitte jeweils ein eigenes Kontaktkraftgesetz in Anlehnung an /10/, /19/ formulieren muß. Das Kontaktkraftgesetz für den Belastungsvorgang ($0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$) lautet

$$F = \bar{N} \alpha^P . \qquad 4.17$$

Wird nun die Stoßkraft in Gl. 4.14 durch das Kontaktkraftgesetz der Belastungsphase ersetzt, so erhält man eine Differentialgleichung für die gegenseitige Annäherung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\bar{N}\alpha^P}{m_K} + \alpha_p \bar{N} \frac{d\alpha^P}{dt} = 0 \quad , \qquad 4.18$$

die durch Einführung dimensionsloser Variablen, wie der dimensionslosen Annäherung

$$\delta = \frac{\alpha}{V_0 T_R} \qquad 4.19$$

der dimensionslosen Zeiten

$$\tau = \frac{t}{T_R} \qquad 4.20$$

und

$$\tau' = \frac{t'}{T_R} \qquad 4.21$$

mit den Beziehungen

$$\frac{d\alpha}{dt} = V_0 \frac{d\dot{\sigma}}{d\tau}, \qquad 4.22$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{V_0}{T_R} \frac{d^2\dot{\sigma}}{d\tau^2}, \qquad 4.23$$

$$\frac{d\alpha^p}{dt} = \frac{V_0^p T_R^p \frac{d\dot{\sigma}^p}{d\tau}}{T_R} \qquad 4.24$$

eingesetzt in Gl. 4.18 zu folgender Differentialgleichung führt

$$\frac{d^2\dot{\sigma}}{d\tau^2} + \frac{\bar{N} T_R^{p+1} V_0^{p-1}}{m_H} \dot{\sigma}^p + \alpha_p \frac{\bar{N} T_R^{p+1} V_0^{p-1}}{T_R} \frac{d\dot{\sigma}^p}{d\tau} = 0. \qquad 4.25$$

Wählt man die Referenzzeit T_R so, daß der Koeffizient

$$\frac{\bar{N} T_R^{p+1} V_0^{p-1}}{m_H} = 1 \qquad 4.26$$

und daher

$$T_R = \left(\frac{m_H}{\bar{N} V_0^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p+1}} \qquad 4.27$$

wird, dann bekommt man für die Belastungsphase ($0 \leq \tau \leq \tau_{\dot{\sigma}^p_{max}}$) eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\underline{\frac{d^2\dot{\sigma}}{d\tau^2} + \left(1 + \lambda \frac{d}{d\tau}\right) \dot{\sigma}^p = 0} \qquad 4.28$$

mit

$$\lambda = \frac{m_H \alpha_p}{T_R} \qquad 4.29$$

als Stoßkennzahl.
Die für die Lösung notwendigen Anfangsbedingungen lauten

$$\delta(\tau=0) = 0 \quad , \tag{4.30}$$

$$\frac{d\delta}{d\tau}(\tau=0) = 1 \quad . \tag{4.31}$$

In den Bildern 4.2 und 4.3 sind für verschiedene Stoßkennzahlen λ und für verschiedene Stoßexponenten p die aus Gl. 4.28 berechneten dimensionslosen Stoßkraftkurven δ_B^p als Funktion der dimensionslosen Zeit τ aufgetragen. Zur schnellen Abschätzung der maximalen Stoßkraft, sowie des Zeitpunkts der maximalen Stoßkraft sind in den Bildern 4.4 und 4.5 die Werte δ_{max}^p bzw. $\tau_{\delta_{max}^p}$ für verschiedene Stoßexponenten p in Abhängigkeit von λ aufgetragen.

Für den elastisch ablaufenden Entlastungsvorgang ($\alpha_{rem} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$) /10/, /19/, der durch folgendes Kontaktkraftgesetz beschrieben wird

$$F = F_{max} \left(\frac{\alpha - \alpha_{rem}}{\alpha_{max} - \alpha_{rem}} \right)^q \quad , \tag{4.32}$$

läßt sich analog dem Belastungsvorgang ebenfalls eine Differentialgleichung für die gegenseitige Annäherung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{F_{max}}{m_K} \left(\frac{\alpha - \alpha_{rem}}{\alpha_{max} - \alpha_{rem}} \right)^q + \alpha_p \frac{d\left[F_{max} \left(\frac{\alpha - \alpha_{rem}}{\alpha_{max} - \alpha_{rem}} \right)^q \right]}{dt} = 0 \tag{4.33}$$

bzw. für die dimensionslose Annäherung ($\tau_{\delta_{max}^p} \leq \tau \leq \tau_{\delta_{rem}}$)

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \left(1 + \lambda \frac{d}{d\tau} \right) \left[\delta_{max}^p \left(\frac{\delta - \delta_{rem}}{\delta_{max} - \delta_{rem}} \right)^q \right] = 0 \tag{4.34}$$

formulieren.

Weil Gl. 4.28 und Gl. 4.34 nicht geschlossen lösbar sind, müssen deren Lösungen auf numerischem Wege

erfolgen. Da sich bekanntlich Differentialgleichungen n-ter Ordnung in Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung umformen lassen, bietet sich zur Lösung dieses Typs von Differentialgleichungen das Verfahren von Runge-Kutta /22/ an. In Bild 4.6 sind die dimensionslosen Stoßkräfte σ_B^p bzw. σ_E^p für bestimmte Stoßkennzahlen λ und Stoßexponenten p als Funktion der dimensionslosen Zeit τ aufgetragen.

Die Verarbeitung dieser Differentialgleichung erfolgte mit Hilfe eines HPL-Programms (HPL = Hewlett-Packard Language) auf einem Rechner der Firma Hewlett-Packard vom Typ HP 9825 A mit einer Schrittweite von $\Delta\tau = 0{,}05$. Kleinere Schrittweiten brachten keinen meßbaren Genauigkeitszuwachs, vielmehr aber höhere Rechenzeiten mit sich. Aus Gl. 4.34 ist ersichtlich, daß zur Berechnung der dimensionslosen Annäherung σ bzw. der dimensionslosen Stoßkraft σ_E^p für die Entlastungsphase die bleibende dimensionslose Annäherung σ_{rem} benötigt wird. Diese Größe ist für verschiedene Stoßexponenten p als Funktion des Stoßparameters λ in Bild 4.7 wiedergegeben.

Die Stoßkräfte lassen sich nun für die Belastungsphase aus

$$F = \bar{N}\,(v_0 T_R)^p\,\sigma_B^p \qquad 4.35$$

und für die Entlastungsphase aus

$$F = \bar{N}\,(v_0 T_R)^p\,\sigma_E^p \qquad 4.36$$

mit

$$\sigma_E^p = \sigma_{max}^p \left(\frac{\sigma - \sigma_{rem}}{\sigma_{max} - \sigma_{rem}}\right)^q \qquad 4.37$$

leicht berechnen.

Obwohl bei dieser Betrachtungsweise nur der dem Biegungsmoment zugeordnete Durchbiegungsanteil berück-

sichtigt wurde, die durch die Querkraftverformung hervorgerufene Durchbiegung sowie die Rotationsträgheit und irgendwelche Dämpfungen aber unberücksichtigt bleiben, zeigt, wie in Kap. 5 ausführlich dargestellt, die Gegenüberstellung der nach vorliegenden Gleichungen errechenbaren Stoßkraftverläufe mit den gemessenen Stoßkraftkurven gute Übereinstimmung. Auf diese Weise kann man nicht nur die Leistungsfähigkeit des hier dargestellten Verfahrens zeigen, sondern die Gültigkeit der bis jetzt nur für statische Zwecke /10/, /19/ benutzten Kontaktkraftgesetze für den dynamischen Fall, speziell für den Plattenstoß, veranschaulichen. Weitere Ergebnisse, die aus errechneter gegenseitiger Annäherung gewonnen wurden, sind für verschiedene Stoßkombinationen in den Bildern 4.9 - 4.11 festgehalten.

5. Elasto-plastische Kontaktkraftgesetze und deren Parameterbestimmung

Die Stoßkraft, die aus der gegenseitigen Annäherung (siehe Gl. 4.14 und Gl. 4.33) bestimmt wird, läßt sich nur dann für eine bestimmte Stoßkombination berechnen, wenn die Parameter der Kontaktkraftgesetze für die Belastungs- und die Entlastungsphase bekannt sind. In Anlehnung an das Hertzsche Kontaktkraftgesetz /1/, /6/, /26/, das den elastischen Stoßvorgang charakterisiert, werden hier im Sinne der elasto-plastischen Stoßwechselwirkung modifizierte Kontaktkraftgesetze verwendet /10/, /19/.

Nachdem sich diese Ansätze beim elasto-plastischen Balkenbiegestoß /57/, /63/, /82/ bestens bewährt haben, soll hier in Verbindung mit einer vereinfachten Stoßtheorie die Verwendung elasto-plastischer Kontaktkraftgesetze auch für den transversalen Plattenstoß gezeigt werden.

Die Parameter, d.h. die Koeffizienten und Exponenten der Kontaktkraftgesetze, die ursprünglich durch statische Versuche bestimmt wurden /24/, werden hier direkt aus dem gemessenen Stoßkraftverlauf und dem daraus errechenbaren zeitlichen Verlauf der gegenseitigen Annäherung ermittelt. Diese experimentell-numerische Methode hat den Vorteil, daß dynamische Effekte, die der gemessene Stoßkraftverlauf beinhaltet, berücksichtigt werden.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei der Bestimmung der Parameter $\overline{N}$, p, q keinerlei Annahmen über deren Größe gemacht werden, obwohl man aus physikalischen Gründen wegen des elastischen Entlastungsprozesses wie beim Hertzschen Kontaktkraftgesetz einen Exponenten von q=1,5 erwarten darf.

Zur Bestimmung der Parameter der Kontaktkraftgesetze wird der zeitliche Verlauf der experimentell ermittelten Stoßkraft (siehe Bild 5.1) mit einer Zeitschrittweite von t=2 µs pro Punkt von einem digitalen Speicheroszilloskop aufgenommen und anschließend in ein Rechenprogramm eingelesen, welches aus der Integralbeziehung

$$\alpha(t) = v_0 t - \frac{1}{m_R} \int_0^t F(t')\,(t-t')\,dt' - \alpha_p \int_0^t F(t')\,dt' \qquad 5.1$$

die gegenseitige Annäherung (siehe Bild 5.2) errechnet.

Da der Stoßkraftverlauf mit bis zu 500 Punkten pro Signal vorliegt und direkt in das Rechenprogramm eingegeben wird, ist die Fehlermöglichkeit im Gegensatz zu früheren Arbeiten /57/, /63/, /82/ relativ gering.

Für jeden Zeitpunkt stellt man nun in entsprechender Zeitschrittweite jedem experimentell ermittelten Stoßkraftwert die aus Gl. 5.1 errechnete Annäherung gegenüber. Aus den so erhaltenen Wertepaaren von F und α (siehe Bild 5.3), erhält man in Verbindung mit dem Kontaktkraftgesetz für die Belastung ($0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$)

$$F = \bar{N} \alpha^p \qquad 5.2$$

bzw. mit dem Kontaktkraftgesetz für die Entlastung ($\alpha_{rem} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$)

$$F = F_{max} \left(\frac{\alpha - \alpha_{rem}}{\alpha_{max} - \alpha_{rem}} \right)^q \qquad 5.3$$

und der Methode des Minimums der Fehlerquadratsumme /85/ die Parameter dieser Gesetze, wie den Belastungskoeffizient $\bar{N}$, den Belastungsexponent p und den

Entlastungsexponent q.

Durch umfangreiche Versuche wird die Abhängigkeit der Parameter der elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze vom Kugeldurchmesser und von der Stoßgeschwindigkeit systematisch untersucht. Die so erhaltenen Ergebnisse findet man für die Stoßkombinationen Stahl-Messing und Stahl-Aluminium in Bild 5.4 wieder.

Da sich der zu erwartende Entlastungsexponent von q=1,5 als Resultat nahezu ergibt und die Gegenüberstellung gemessener und errechneter Werte der Stoßbelastung (siehe Kap. 10) keine nennenswerten Abweichungen zeigen, kann man davon ausgehen, daß die hier verwendete experimentell-numerische Methode neben allgemein üblichen Meßungenauigkeiten keinen systematischen Fehler aufweist, obwohl bei der vereinfachten Betrachtungsweise Rotationsträgheit, Querkraftdeformation und Dämpfungen unberücksichtigt bleiben.

Auf eine exaktere Beschreibung des Stoßgeschehens ohne die oben erwähnten Einschränkungen, die vermutlich zu einer geringfügigen Abweichung der Parameterwerte führen würden, kann, wie die Ergebnisse zeigen, zugunsten der hier verfolgten Methode, die eine schnellere Berechnung der Stoßbelastungswerte erlaubt, verzichtet werden.

Bild 5.5 zeigt die Stoßkraft-Annäherungsbeziehungen - die elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze - für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten bei den Stoßkombinationen Stahl-Messing und Stahl-Aluminium.

6. Kinematik der Stoßkugel und des gestoßenen Plattenelementes während der Kontaktwechselwirkung

Um einen besseren Einblick in die Bewegungsverhältnisse der Stoßkugel und des gestoßenen Plattenelementes während der Kontaktdauer ($0 \leq t \leq t_{K1}$) zu bekommen, wird in diesem Abschnitt die Kinematik der Stoßpartner untersucht. Zu diesem Zweck wird zunächst der zeitliche Verlauf der Stoßmassenbeschleunigung $\ddot{w}(t)$ während des Kontaktes mit Hilfe eines an der Kugel gegenüber dem Stoßpunkt befestigten Beschleunigungsaufnehmers gemessen (siehe Kap. 8).

Dieses Signal und der vorher aus der experimentell ermittelten Stoßkraft F(t) errechnete zeitliche Verlauf der gegenseitigen Annäherung $\alpha(t)$ (siehe Kap. 5) werden dazu benutzt, um die kinematischen Verhältnisse während des Stoßvorganges zu untersuchen.

Durch einmalige Integration des zeitlichen Beschleunigungsverlaufes der Stoßkugel unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$\dot{w}(0) = v_0 \qquad 6.1$$

erhält man die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Stoßmasse $\dot{w}(t)$. Eine weitere Integration nach der Zeit t mit der Anfangsbedingung

$$w(0) = 0 \qquad 6.2$$

führt zu der Schwerpunktsverschiebung w(t) der Kugel.

Bildet man nun die Differenz von Schwerpunktsverschiebung des Stoßkörpers w(t) und gegenseitiger Schwerpunktsannäherung $\alpha(t)$ (siehe Gl. 4.1), so erhält man den zeitlichen Durchbiegungsverlauf des gestoßenen Plattenelementes $W_o(t)$ unter dem Stoßpunkt. Der so ermittelte

Durchbiegungsverlauf $W_o(t)$ wurde mit dem nach Gl. 2.60 errechenbaren Verlauf verglichen und zeigte, wie nicht anders zu erwarten, keine nennenswerte Abweichung.

Die erste Ableitung des Durchbiegungsverlaufes $W_o(t)$ nach der Zeit t ergibt die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\dot{W}_o(t)$ und eine nochmalige Differentiation führt zur Schwerpunktsbeschleunigung $\ddot{W}_o(t)$ des unter der Stoßstelle befindlichen Plattenelementes.

Bildet man noch die Differenz zwischen den Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\dot{w}(t)$ bzw. $\dot{W}_o(t)$ und den Schwerpunktsbeschleunigungen $\ddot{w}(t)$ bzw. $\ddot{W}_o(t)$, so sind sämtliche kinematischen Größen des transversalen Plattenstoßes mit elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung bestimmt.

In Bild 6.1 sind die kinematischen Verhältnisse des Stoßes einer gehärteten Stahlkugel von d_K=70 mm auf eine Messingplatte dargestellt. Die aus der Kontaktwechselwirkung von Stoßkugel und gestoßenem Plattenelement resultierenden Oberschwingungen des gemessenen Beschleunigungssignals (siehe Kap. 8) sind für die kinematischen Untersuchungen von Hand "geglättet" worden, weil diese Störungen bei zweimaliger Ableitung nach der Zeit zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen. Die Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\dot{w}$, $\dot{W}_o$ und die Annäherungsgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ jeweils in Abhängigkeit von der Zeit t sind für die Stoßkombinationen Stahl-Messing und Stahl-Aluminium in Bild 6.2 festgehalten.

Die beim Plattenstoß auftretenden Mehrfachstöße der Stoßkombination Stahl-Aluminium wurden ebenfalls schon beim Stoß einer gehärteten Stahlkugel auf einen Aluminiumbalken /57/, /63/ beobachtet. Bei der Untersuchung der Kinematik des Balkenquerstoßes stellte man fest, daß sich am Ende der ersten Stoßkrafteinwirkung die

Geschwindigkeit der Stoßkugel noch nicht umgekehrt hat, d.h. die Kugel befindet sich noch in Vorwärtsbewegung, um einen erneuten Stoß auszulösen. Hier wurde also der Versuch unternommen, mit Hilfe der Stoßrichtung der Kugel einen gewissen Aufschluß über die stattgefundene Kontaktwechselwirkung zu bekommen.

Im Gegensatz zu den kinematischen Verhältnissen beim Balkenstoß erfährt die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Stoßkugel beim Plattenstoß eine Richtungsänderung, auch dann, wenn wie bei der Stoßkombination Stahl-Aluminium Mehrfachstöße auftreten. Betrachtet man die Ableitung des Durchbiegungsverlaufes nach der Zeit t an der Stelle t_{K1}, so ist wegen $F(t_{K1})=0$ (siehe Gl. 2.60)

$$\dot{W}_o(t_{K1}) = 0 \qquad 6.3$$

und ebenfalls die zeitliche Ableitung der gegenseitigen Annäherung an der gleichen Stelle

$$\dot{\alpha}(t_{K1}) < 0 \qquad 6.4$$

so muß die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Stoßkugel nach Gl. 4.1 immer

$$\dot{w}(t_{K1}) < 0 \qquad 6.5$$

sein.

Konnte also bei Balkenproblemen die Stoßrichtung der Kugel bei Kontaktende einen gewissen Aufschluß über die Kontaktwechselwirkung geben, so wird man in der Erklärung des Mehrfachstoßes bei Plattenproblemen mehr auf das Schwingungsverhalten der Platte eingehen müssen.

Diese Vermutung verstärkt sich noch durch Stoßversuche, die an "unendlich" dicken Platten (siehe Kap. 7) durchgeführt wurden und bei denen für alle hier überprüften Stoßkombinationen keine Mehrfachstöße zu verzeichnen sind.

7. Betrachtungen zum Stoß einer Kugel auf einen unendlichen Halbraum (Blockstoß)

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, daß die Parameter des elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzes beim Stoß einer Kugel auf einen unendlichen Halbraum, oder passender formuliert, auf eine unendlich dicke Platte (Block) nicht, wie von anderen Autoren /10/, /19/ in erster Näherung benutzt, auf den Plattenbiegestoß mit elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung verwendet werden können. Die Erklärung dieser Tatsache liegt einerseits in der Geometrie und andererseits in der mechanischen Reaktion des gestoßenen Körpers, denn neben der "unendlichen" Masse des Blocks kommen noch Formen unterschiedlicher Energieumwandlungen des Block- bzw. Plattenstoßes hinzu.

Betrachtet man die Umwandlung der Aufprallenergie der Kugel beim Blockstoß, so stellt man fest, daß im Gegensatz zum Plattenstoß Energieanteile (elastische Verformungsenergie und kinetische Energie), die die Platte aufnimmt, um durchzubiegen, beim Block nicht vorhanden sind. Diese Energiedifferenzen werden beim Blockstoß noch zusätzlich in plastische Verformungsenergie des Kraters und in elastische Verformungsenergie der Kugel umgewandelt. Demzufolge sind im Vergleich zur Platte die bleibenden gegenseitigen Annäherungen α_{rem} (siehe Bild 7.4), die maximalen Stoßkräfte F_{max} (siehe Bild 7.5) und die Rückprallgeschwindigkeiten der Kugel v_o (siehe Bild 7.6) beim Blockstoß erheblich größer.

Eine direkte Übertragung der Resultate des Blockstoßes auf den transversalen Plattenstoß würde auch voraussetzen, daß die Parameterwerte der Kontaktkraftgesetze sowohl für den Block wie auch für die Platte gleich sein müssen. Um dieses zu untersuchen, werden die

Parameter der Kontaktkraftgesetze beim Blockstoß in gleicher Weise wie beim Plattenstoß bestimmt. An dieser Stelle sei erwähnt, daß der Block jeweils aus dem gleichen Material wie die Platte gefertigt wurde.

Die Bestimmung der Parameter erfolgt, wie schon in Kap. 5 für den Plattenstoß ausführlich dargestellt, mit Hilfe der experimentell bestimmten Stoßkraft F(t) (siehe Bild 7.1), nur mit der Einschränkung, daß in der Annäherungsbeziehung (siehe Gl. 4.8) wegen der "Unendlichen Plattendicke" der Durchbiegungsanteil entfällt.

Die Beziehung für den zeitlichen Verlauf der aus der experimentell bestimmten Stoßkraft errechenbaren gegenseitigen Annäherung $\alpha(t)$ (siehe Bild 7.2) lautet dann

$$\alpha(t) = w(t) = v_0 t - \frac{1}{m_K} \int_0^t F(t')(t-t')\,dt' \,. \qquad 7.1$$

Wendet man auch hier das Prinzip des Minimums der Fehlerquadratsumme auf die Stoßkraft-Annäherung-Beziehung an, so erhält man die Parameter der Kontaktkraftgesetze für den elasto-plastischen Blockstoß. Die in Bild 7.3 festgehaltenen Werte der Belastungskoeffizienten $\overline{N}$ für die Stoßkombinationen Stahl-Messing und Stahl-Aluminium sind in keiner Weise gleich mit den Werten des Plattenstoßes, und die Belastungsexponenten p des Blockstoßes besitzen im Gegensatz zu denen des Plattenstoßes keine Abhängigkeit vom verwendeten Kugeldurchmesser. Die Abhängigkeit der Belastungsexponeten des Plattenstoßes vom Kugeldurchmesser ist vermutlich auf die mehr oder minder starke Reaktion der Platte (Nachgiebigkeit und Durchbiegungsverhalten) beim Stoß von Kugeln unterschiedlicher Masse zurückzuführen. Eine solche Nachgiebigkeit des gestoßenen Bauteils, die den

Belastungsexponent in Abhängigkeit vom Kugeldurchmesser beeinflußt, ist verständlicherweise beim Block nicht möglich, wie auch die Ergebnisse von p=1,6 bei der Stoßkombination Stahl-Messing und p=1,4 bei der Kombination Stahl-Aluminium für alle Kugeldurchmesser zeigen. Der Entlastungsexponent hat auch hier, wie die Versuche bestätigen, wegen des elastischen Entlastungsvorganges den Wert q=1,5.

Die zur Abschätzung der maximalen Stoßkraft in Kap. 4 errechneten dimensionslosen Kenngrößen $\delta^{p}_{max}(p,\lambda)$ (siehe Bild 4.4) besitzen auch für den Blockstoß, der durch die Stoßkennzahl $\lambda=0$ (unendlich dicke Platte) charakterisiert ist, Gültigkeit. Der Vergleich von experimentell ermittelter und nunmehr unter Verwendung der Parameter des elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzes für den Blockstoß rechnerisch bestimmter Maxima der Stoßkraft F_{max} zeigt (siehe Bild 7.5) gute Übereinstimmung.

Umfangreiche Versuche haben gezeigt, daß Mehrfachstöße, wie sie insbesondere beim transversalen Stoß auf Aluminiumbalken /57/, /62/, /63/ und Aluminiumplatten beobachtet werden, beim Stoß auf Aluminiumblöcke nicht auftreten. Diese Tatsache läßt sich vermutlich aus unterschiedlichem Schwingungsverhalten von Platten, Balken und Blöcken erklären. Man wird sich in weiteren Untersuchungen, was aber wegen der Problemvielfalt nicht Gegenstand dieser Arbeit sein kann, der Frage widmen müssen, inwieweit auch die Form und die Materialeingenschaft des Bauteils ein Auftreten von Mehrfachstößen beeinflussen.

8. Stoßapparatur und verwendete Meßprinzipien

Bild 8.1 zeigt das Schema der eigens für diesen Zweck entwickelten Stoßapparatur mit einer am Rande fest eingespannten Platte. Diese Einspannung wird versuchstechnisch dadurch realisiert, daß man die Platte mit 24 Sechskantschrauben zwischen zwei schwere Stahlflansche einspannt. Wegen der elasto-plastischen Kontaktwechselwirkung und der damit verbundenen Kraterbildung ist immer nur ein Stoß an ein und derselben Stelle möglich. Um die Plattenoberfläche möglichst weitgehend unter Beachtung des Frühstadiums nutzen zu können, muß die translatorische und rotatorische Verschiebung des Stoßpunktes relativ zur Platte sichergestellt sein.

Die translatorische Verschiebung erfolgt durch einen Führungsschlitten, der auf zwei Rundführungen beweglich gelagert ist und über eine Spindel von 5 mm Steigung mittels eines Handrades angetrieben wird. Die Quertraverse, an der zur groben Abschätzung der Stoßgeschwindigkeit eine Winkelskala befestigt ist, dient als Pendelaufhängung der an zwei Stahllitzen befestigten Stoßkugel. Außerdem beinhaltet sie die wegen der Verwendung unterschiedlicher Kugeldurchmesser notwendige Verstellmöglichkeit der Kugel in Höhe und Tiefe. Ein in der Mitte zwischen beiden Stahllitzen befindlicher Perlonfaden dient als Zeiger für die Winkelskala.

Die geforderte Rotationsbewegung wird direkt an der Platte ausgeführt. Dazu kann man jeweils die am Verbindungsstück zwischen Rahmen und Flansch befindlichen Sechskantschrauben lösen und den Flansch mit Platte um einen Lochteilungsabstand drehen. Diese diskrete Verschiebung um 15° genügt den an die Versuchsapparatur

gestellten Anforderungen, da eine kontinuierliche Verstellmöglichkeit einen bedeutend höheren Konstruktions- und Fertigungsaufwand verlangen würde.

Die Aufnahme des Führungsschlittens erfolgt in einem schweren Rahmen, der zur Höhenverstellung mit vier Spindelfüßen ausgerüstet ist. Der Rahmen muß sehr steif und schwer ausgerüstet werden, um eine von der Stoßkugel erzwungene Biegeschwingung der Platte nach Möglichkeit nicht auf die Stoßapparatur zu übertragen. Aus diesem Grund ist auch der die ganze Stoßapparatur aufnehmende Tisch relativ schwer. Die hier verwendete Stoßapparatur ist so ausgelegt, daß neben der Untersuchung transversal gestoßener Platten auch noch die Möglichkeit besteht, Balken verschiedener Einspannbedingungen mit Stoßgeschwindigkeiten bis $v_o = 4$ m/s zu belasten. Außerdem ist am Führungsschlitten unter dem Stoßpunkt ein Adapter befestigt, der zur Aufnahme der für die Durchbiegungs- und Eigenfrequenzmessung notwendigen kapazitiven Wegaufnehmer dient.

Obwohl wie vorne schon erwähnt die Messungen vorherrschend in dem von den Einspannbedingungen unabhängigen Frühstadium durchgeführt werden, wird die Güte der Einspannung überprüft. Dazu werden Eigenfrequenzen der Grundschwingungen gemessen und dem aus Gl. 2.51 errechenbaren Wert gegenübergestellt. Die Bestimmung der Grundfrequenz erfolgt im eingeschwungenen Zustand der zentral erregten Platte mittels eines kapazitiven Wegaufnehmers. Eine andere Möglichkeit bietet die Dehnungsaufzeichnung der Schwingungen mittels Dehnungsmeßstreifen. Beide Meßmethoden werden später ausführlich erklärt. Die Belegaufnahme einer Grundschwingung für die Messingplatte zeigt Bild 8.2. Eine Gegenüberstellung gemessener und errechneter Grundfrequenzen der Messingplatte ergibt:

$$\omega_{1exp} = 688\ s^{-1} ,$$

$$\omega_{1theo} = 707\ s^{-1} .$$

Wie man sieht, ergibt sich eine relativ gute Übereinstimmung der Grundfrequenzen, wobei der experimentell ermittelte Wert schon alleine wegen der unvollkommen festen Einspannung und der größeren mitschwingenden Masse etwas niedriger als der theoretisch bestimmte Wert erwartet werden kann.

Zur Erzeugung des transversalen Stoßes dienen wie schon erwähnt bifilar aufgehängte gehärtete Stahlkugeln verschiedener Durchmesser, die durch entsprechende Wahl der Fallhöhen mit Stoßgeschwindigkeiten bis maximal v_o = 4,00 m/s auf die Platte treffen. Die Kugel wird durch einen Dauermagneten in der gewünschten Fallhöhe gehalten, der sie nach magnetischem Kurzschluß für eine Pendelbewegung im Schwerefeld der Erde freigibt. Zur Grobeinstellung und für orientierende Versuche kann man sich der Winkelskala an der Quertraverse bedienen, während für genaue Messungen die Fallhöhe mit Hilfe eines Kathetometers überprüft wird.

Die Verzögerung der Stoßmasse und damit die Stoßkraft nach dem Aufprall der Stoßkugel auf die Platte wird durch einen Beschleunigungsaufnehmer vom Typ Kistler 802 B mit einer Empfindlichkeit von 0,499 pC/g, der an der Kugel dem Stoßpunkt gegenüber befestigt ist, gemessen. Der hier verwendete Beschleunigungsaufnehmer mit einer Eigenfrequenz von ca. 40 kHz besteht aus einer seismischen Masse, die mit einer Quarzmasse, an der beim Beschleunigen oder Verzögern elektrische Ladungsänderungen entstehen, verbunden ist. Diese Ladungsveränderungen werden über einen Verstärker in eine dazu proportionale Spannungsänderung umgeformt und direkt

dem digitalen Speicheroszilloskop vom Typ Nicolet Explorer III zugeführt (siehe Bild 8.3).

Versuchsdaten

Platten:

Material: Messing (Ms 63)	Material: Aluminium (Al 99,5)
$E_p = 0{,}106 \cdot 10^{12}$ N/m^2	$E_p = 66{,}195 \cdot 10^9$ N/m^2
$\nu_p \approx 0{,}300$	$\nu_p \approx 0{,}300$
$\varrho_p = 8{,}336 \cdot 10^3$ kg/m^3	$\varrho_p = 2{,}673 \cdot 10^3$ kg/m^3
R = 0,450 m	R = 0,450 m
h = 0,013 m	h = 0,013 m
$m_p = 68{,}941$ kg	$m_p = 22{,}106$ kg
$c_B = 2060$ m/s	$c_B = 2870$ m/s
HB = 900 N/mm^2	HB = 300 N/mm^2

Stoßmassen:

Material: gehärteter Kugellagerstahl

$E_K = 0{,}211 \cdot 10^{12}$ N/m^2
$\nu_K = 0{,}280$
$\varrho_K = 7{,}850 \cdot 10^3$ kg/m^3
$d_K \cdot 10^2 = 5{,}08$ m; 6,00 m; 7,00 m; 8,00 m
$m_K = 0{,}589$ kg; 0,917 kg; 1,467 kg; 2,156 kg

Um die Eigenschwingungen des Beschleunigungsaufnehmers und der Stoßkugel, sowie des unter der Stoßstelle befindlichen Plattenelementes zu dämpfen, wird ein Tiefpaßfilter mit einer Grenzfrequenz von 22 kHz verwendet. Vergleichende Messungen mit und ohne Tiefpaßfilter haben gezeigt, daß der Einsatz eines 22 kHz Filters nur geringen Einfluß auf die Flankensteilheit des elektrischen Signals hat. Die Oberschwingungen, die zur Verfälschung der Ergebnisse führen können, werden dadurch vor der Aufzeichnung geglättet.

Aus den so gemessenen Verzögerungen lassen sich mit den Stoßmassen, die sich aus den Kugel- und den Gebermassen zusammensetzen, die zeitlichen Stoßkraftverläufe berechnen. Die Auslösung der Zeitbasis des digitalen Speicheroszilloskops erfolgt bei Kontaktbeginn (t=0) durch einen beim Aufprall entstehenden elektrischen Kurzschluß zwischen der bei Stoßkraft- und Dehnungsmessungen auf positivem Potential liegenden Platte und der geerdeten Kugel. An dieser Stelle sei erwähnt, daß die Pendelaufhängung der Stoßkugel gegenüber der Plattenanordnung durch einen Kunststofflager elektrisch isoliert wird.

Beispiele von Stoßkraftkurven, die in Bild 8.4 festgehalten sind, zeigen, daß das Stoßkraftsignal nicht bei t=0, sondern erst nach einer gewissen Verzögerungszeit t_V beginnt. Diese Verzögerung der Stoßkraftkurve ist auf die Laufzeit der sich nach Kontaktbeginn ausbreitenden elastischen Wellen durch die Kugel bis zur Ansprechstelle des Beschleunigungsaufnehmers zurückzuführen, da der Piezokristall des Gebers sich ca. 1 cm außerhalb der Stoßkugel befindet. Nimmt man an, daß sich diese Longitudinalwellen in Stahl mit ca. 5000 m/s fortpflanzen, so erhält man je nach Kugeldurchmesser Verzögerungszeiten von t_V=12 µs (d_K=50,8 mm) bis 18 µs (d_K=80 mm), die bei weiterer digitaler Verarbeitung des zeitlichen Stoßkraftverlaufs zum Abzug gebracht werden müssen.

Die Ankunftszeiten der vom Rand reflektierten Wellen am Stoßpunkt sind durch einen Pfeil (A) gekennzeichnet. Wie man sieht, liegt bei ungefähr gleichem Abstand des Stoßpunktes vom eingespannten Rand die Ankunftszeit der reflektierten Wellen wegen der höheren Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei der Stoßkombination Stahl-Aluminium um etwa 25 % früher. Außerdem zeigt Bild 8.4 deutlich das schon beim Balkenbiegestoß /57/, /63/ beobachtete

Auftreten von Mehrfachstößen bei der Materialkombination Stahl-Aluminium.

Die Dauer des für die theoretischen Betrachtungen wichtigen Frühstadiums läßt sich, wie in Kap. 1 bereits erwähnt, aus der Phasengeschwindigkeit der Biegewellen sehr kurzer Wellenlängen leicht abschätzen. Die Abschätzung führte zu einer Begrenzung des Aufprallgebietes der Stoßkugel auf eine konzentrische Kreisfläche mit dem Radius 0,2 m, in dem der Spannungszustand unabhängig von den Randbedingungen ist. Diese Festlegung hat zur Folge, daß unter Berücksichtigung des Hin- und Rückweges zwischen Stoßstelle und Plattenrand bei einer Phasengeschwindigkeit von $c_B \approx$ 2060 m/s in Messing mit einer Frühstadiumsdauer von $t_{Früh} \approx$ 240 µs - 430 µs und bei $c_B \approx$ 2870 m/s in Aluminium mit $t_{Früh} \approx$ 180 µs - 320 µs zu rechnen ist.

Erstrebenswert für alle Versuche ist, daß wegen der in der vereinfachten Stoßtheorie nicht berücksichtigten Wirkung der vom Rand reflektierten Wellen das Frühstadium zeitlich gesehen immer größer als die Kontaktzeit t_{K1}, d.h. als die Dauer der Kontaktwechselwirkung sein soll. Dieses ist aber nur für einen Teil der hier durchgeführten Versuche der Fall, stört aber dennoch nicht, da die ersten an der Stoßstelle eintreffenden Biegestörungen so schwach sind, daß sie den von den Randbedingungen unabhängigen Spannungszustand an der Kontaktstelle nicht merklich stören. Die ersten nur bei der Stoßkombination Stahl-Aluminium meßbaren Störungen durch Mehrfachstöße liegen, je nach Entfernung von der Stoßstelle zur Platteneinspannung, bedeutend später als die theoretisch berechneten Ankunftszeiten der von der Einspannung reflektierten Biegewellen sehr kurzer Wellenlänge am Stoßpunkt.

Eine Gegenüberstellung von mehreren Stoßkraftkurven,

deren Stoßpunkte in immer kleiner werdender Entfernung zur Einspannstelle liegen (siehe Bild 8.5) macht deutlich, daß der Zeitpunkt des Auftretens weiterer Stöße nicht über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Biegewellen abzuschätzen ist. Wie man sieht, ist der Zeitpunkt des Auftretens eines zusätzlichen Stoßes direkt proportional der Entfernung vom Stoßpunkt zur Einspannung. Man wird sich aber in weiteren Untersuchungen, was nicht Gegenstand dieser Arbeit sein soll, genauer damit beschäftigen müssen, welche Art von Wechselwirkungen weitere Stöße verursachen. Mit der hier für Versuchszwecke erfolgten Abschätzung der Frühstadiumsdauer über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Biegewellen liegt man demnach mit einiger Sicherheit in dem von den reflektierten Wellen ungestörten Bereich.

Die Messung der Axialdehnung, die sich aus der Summe von Biege- und Längsdehnung /86/ zusammensetzt, wird mit einem unter der Stoßstelle befindlichen Dehnungsmeßstreifen (kurz: DMS) der Fa. Hottinger-Baldwin vom Typ LY 11 vorgenommen. Die hier verwendeten DMS haben wegen der geforderten punktweisen Dehnungsmessung eine relativ kleine Meßbasis von ca. 0,6 mm bei einem Widerstand von ca. $R_{DMS} = 120\,\Omega$ und einem k-Faktor von etwa $k_g = 2$.

Wie Bild 8.3 zeigt, wird nach der Methode des "konstanten Stromes" gearbeitet. Zu diesem Zweck wird dem DMS ein großer Widerstand von ca. 15 kΩ vorgeschaltet, der den Strom I in dieser Potentiometerschaltung überwiegend bestimmt. Auf eine Temperaturkompensation zur Eliminierung der scheinbaren Dehnung wird wegen der schnell ablaufenden Vorgänge verzichtet. Die an der Plattenunterseite stattfindende Dehnung ruft im DMS eine Längenänderung des Meßgitters und somit eine Widerstandsänderung hervor. Eine daraus resultierende

Spannungsänderung $\Delta U(t)$ wird auf dem Monitor des digitalen Speicheroszilloskops sichtbar gemacht. Aus der mit dem DMS gemessenen Spannungsänderung kann man die unter dem Stoßpunkt auftretende Dehnung wie folgt errechnen

$$\varepsilon_{axial} = \frac{\Delta U}{k_g R_{DMS} I} \quad . \qquad 8.1$$

Da es sich in diesem Belastungsfall um einen zweidimensionalen Spannungszustand handelt, ist normalerweise eine Korrektur des k-Faktors erforderlich, weil der DMS im einachsigen Spannungszustand geeicht wurde. Wegen der relativ kleinen Querempfindlichkeit ($Q < 1$ %) der hier verwendeten DMS kann von einer Korrektur des k-Faktors abgesehen werden /57/. Bild 8.6 zeigt Aufzeichnungsbeispiele von unter der Stoßstelle gemessenen zeitlichen Axialdehnungsverläufen für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten und Kugeldurchmesser bei der Stoßkombination Stahl-Messing.

Die Plattendurchbiegung unter der Stoßstelle im Frühstadium der Kontaktwechselwirkung wird berührungslos mit Hilfe eines gegenüber der Stoßstelle an der Plattenunterseite befindlichen kapazitiven Wegaufnehmers gemessen. Die Meßfläche des unter dem Stoßpunkt sitzenden Gebers der Fa. Wayne Kerr Typ MD 1 bildet mit der Plattenrückseite einen Kondensator. Ein am Geber angeschlossenes Abstandsmeßgerät formt die infolge der Durchbiegung des gestoßenen Plattenelementes hervorgerufene Kapazitätsänderung in eine der Abstandsänderung proportionale Spannungsänderung um.

Bild 8.7 zeigt das Schema der Durchbiegungsmessung, wobei im Gegensatz zur Stoßkraft- und Dehnungsmessung die Platte in diesem Fall auf Erdpotential liegen muß. Das hier verwendete Abstandsmeßgerät arbeitet nach dem Trägerfrequenzprinzip mit einer Trägerfrequenz von

50 kHz. Dieses Meßprinzip besitzt aber eine gewisse Ansprechträgheit, so daß man vom zeitlichen Verlauf der Durchbiegungssignale wie in Bild 8.8 dargestellt, nach unseren Erfahrungen eine Verzögerungszeit von ca. 20 µs = 1/50 kHz in Abzug bringen muß /55/, /56/.

Der zeitliche Verlauf der gegenseitigen Annäherung von Stoßkugel und gestoßenem Plattenelement läßt sich aus meßtechnischen Gründen nur mit sehr großem Aufwand experimentell bestimmen. Die einzige Möglichkeit einer experimentellen Überprüfung der gegenseitigen Annäherung besteht darin, der aus Gl. 4.8 berechenbaren bleibenden gegenseitigen Annäherung α_{rem} zum Zeitpunkt t_{K1} eine gemessene Kratertiefe α_T gegenüberzustellen (siehe Bild 8.9).

Mit einer eigens für diesen Fall angefertigten Meßeinrichtung kann man die Kratertiefe bestimmen. Sie besteht aus einer Feinmeßuhr mit 1.10^{-6}m Meßgenauigkeit, die sich in einer dreipunktgelagerten Halterung befindet. Die Vorgehensweise bei der Ausmessung eines Kraters sieht so aus, daß zunächst vier gleichmäßig auf dem Umfang verteilte Meßpunkte in 10 mm Entfernung vom Kraterrand zur Erzeugung einer Referenzebene dienen. Anschließend wird die danach gemessene Kratertiefe auf die Referenzebene bezogen. Außerdem wurde mit Hilfe eines Werkstattmikroskops der Kraterdurchmesser bestimmt. Diese zusätzlichen Meßgröße kann in Verbindung mit der gemessenen Kratertiefe und der Sehnengleichung eines Kreisabschnittes Auskunft über eine mehr oder weniger starke Abplattung der Kugel während des Stoßvorganges geben (siehe Kap. 10).

Neben den hier beschriebenen Untersuchungen des Plattenstoßes werden aus den vorne genannten Gründen auch Stoßversuche an unendlich dicken Platten (Blöcke) durchgeführt. Wie der unendliche Halbraum versuchs-

technisch realisiert wird, zeigt Bild 8.10. Um eventuelle Vergleichsmöglichkeiten zum Plattenstoß haben zu können, werden für den Blockstoß Plattenmaterialien verwendet. Da das Material nur in einer Stärke von 13 mm vorliegt, wird das zu prüfende Blockmaterial fest mit einem aus relativ weichem Stahl (St 37) bestehenden Futter verbunden. Dieses als Adapter dienende Stahlfutter ist wiederum mit einem schweren Gußtisch verschraubt.

Zu erwähnen ist noch, daß beim Blockstoß wegen der apparatebedingten kleineren Fallhöhe der Stoßmasse nur Stoßgeschwindigkeiten bis maximal 2,00 m/s erreicht werden können.

9. Anordnung zur rechnerunterstützten Auswertung und Weiterverarbeitung gemessener Daten

Da der Stoßvorgang, wie schon ausführlich beschrieben, im Gegensatz zum elastischen Stoß wegen der elastoplastischen Kontaktwechselwirkung nicht reproduzierbar ist und die zeitlichen Verläufe gemessener Belastungsgrößen wie Stoßkraft, Durchbiegung und Axialdehnung zum Teil mathematisch weiterverarbeitet werden sollen, sind an das Gerät, welches die Meßdaten erfaßt, bestimmte Forderungen zu stellen. Diesen Anforderungen genügte ein zweikanaliges digitales Speicheroszilloskop der Fa. Nicolet Instruments vom Typ Explorer III, das über ein Calculator-Interface die Verarbeitung digital gespeicherter Daten durch einen Tischcomputer ermöglicht.

Zum Meßprinzip des digitalen Speicheroszilloskops ist zu sagen, daß die zu speichernden analogen Meßwerte über Eingangsteiler einem schnellen Analog-Digital-Wandler (A/D-Wandler) zugeführt werden (siehe Bild 9.1). Im A/D-Wandler werden die Analogsignale entsprechend der gewählten Samplerate digitalisiert, d.h. zu 4096 binären Einzelwerten je 12 Bit umgesetzt und in einen integrierten Halbleiterspeicher eingeschrieben. Der Signalspeicher läßt sich als Vollspeicher (4096 x 12 Bit) benutzen, sowie in zwei Hälften (2048 x 12 Bit), oder in vier Quadranten (1024 x 12 Bit) aufteilen. Die Auflösung des A/D-Wandlers von 12 Bit ergibt eine Genauigkeit der Meßdatenerfassung von $< 0{,}1$ %.

Für die Monitorausgabe werden die gespeicherten Datenwerte durch ein im Gerät fest installiertes Rechenprogramm immer wieder ausgelesen, einzeln in Analogwerte umgesetzt und auf dem Bildschirm einer Kathodenstrahlröhre als eine Reihe von Punkten abgebildet.

Bei einer analogen Wiedergabe wird das gespeicherte Signal über einen D/A-Wandler wieder in analoge Werte zurückgewandelt, um dann zu Dokumentationszwecken z. B. auf X/Y-, X/T-Schreibern oder herkömmlichen Oszilloskopen beliebig langsam ausgeschrieben zu werden.

Der eingebaute Floppy-Disc-Speicher mit 32 K Wörtern a 12 Bit stellt eine erhebliche interne Speichererweiterung dar. Mit diesem Wechselplattenlaufwerk können bis zu 32 Einzelvorgänge a 1 K gespeichert, dem Rechner zugeführt oder auf der Kathodenstrahlröhre sichtbar gemacht werden. Diese verschiedenen Ausgabe- und Speichermöglichkeiten bieten wegen der hohen Anzahl der Messungen und nicht zuletzt wegen einer Vorabselektion der Ergebnisse eine enorme Zeiteinsparung bei der Auswertung.

Zur Auswertung der auf dem eingebauten Monitor aufgezeichneten Signale kann man mit einem elektronischen Fadenkreuz jeden einzelnen Bildpunkt anfahren, wobei für jeden Punkt die absoluten zugehörigen Zeit- und Amplitudenwerte als Digitalwerte automatisch eingeblendet werden. Außerdem kann die Zone um das Fadenkreuz bis zum 64-fachen in beiden Achsen vergrößert werden, so daß feinste Details wie Maxima, Nulldurchgänge usw. besser aufgelöst werden können.

Das digitale Speicheroszilloskop arbeitet mit Sampleraten von 500 ns - 200 s pro Punkt. Die Taktrate, mit der das für die numerische Weiterverarbeitung wichtige Stoßkraftsignal aufgenommen werden soll, ist jeweils so gewählt, daß der Verlauf der Stoßkraft auf einem Quadranten mit 1 K Wörtern, d.h. 1024 Punkten gespeichert wird. Damit können pro Floppy-Disc 32 Stoßkraftverläufe aufgezeichnet werden. Dehnt man den Betrachtungszeitraum über die erste Kontaktzeit zur Beobach-

tung von Mehrfachstößen oder zur Erfassung maximaler zentraler Durchbiegungen aus, so wird die Anzahl der aufgezeichneten Punkte wegen der größeren Zeitdauer auf 4 K Wörter, d.h. 4096 Punkte erweitert.

Zur numerischen Weiterverarbeitung werden die im digitalen Speicheroszilloskop gespeicherten Daten der Stoßkraft-, Durchbiegungs- und Axialdehnungsverläufe über den Digitalausgang mit Hilfe eines Calculator-Interface in den internen Speicher eines programmierbaren Tischrechners der Fa. Hewlett-Packard vom Typ HP 9825A transferiert. Der Rechner arbeitet mit einer eigens dafür entwickelten Programmiersprache HPL (Hewlett-Packard-Language), die in Anlehnung an BASIC den Komfort der Sprache FORTRAN IV bietet. Es besteht ferner die Möglichkeit, den gesamten internen Speicherinhalt des Rechners, der in der hier vorliegenden Option 23228 Byte umfaßt, auf einer eingebauten zweispurigen Magnetbandkassette mit einer Speicherkapazität von 250 K Byte zu speichern und wieder auszulesen. Durch eine entsprechende Einteilung der Bandkassette in verschiedene Abschnitte (Files) wird die Möglichkeit einer automatischen Versuchsauswertung geschaffen.

Die zur Berechnung der jeweiligen Belastungsgrößen bzw. zur Übernahme der Daten aus dem digitalen Speicheroszilloskop erforderlichen Programme sind auf der Spur 0 der Kassette gespeichert und werden nacheinander automatisch abgearbeitet. Spur 1 des Magnetbandes bleibt ausschließlich der Abspeicherung errechneter Daten vorbehalten.

Ausgehend von der wichtigsten Belastungsgröße, der experimentell ermittelten Stoßkraft, die aus der Floppy-Disc jeweils in den ersten Abschnitt der Spur 1 eingelesen wird, werden mittels einzelner Programme verschie-

dene Belastungsgrößen und Parameter berechnet, die wiederum auf Spur 1 in den jeweiligen Files abgespeichert werden. Neben der Bestimmung der Parameter der Kontaktkraftgesetze, die u.a. zur Berechnung des theoretischen Stoßkraftverlaufs benötigt werden, sollen sämtliche Belastungsgrößen wie gegenseitige Annäherung, Durchbiegung und Biegedehnung unter dem Stoßpunkt, sowie alle kinematischen Größen einmal aus der experimentell und zum anderen aus der theoretisch ermittelten Stoßkraft errechnet und gegenübergestellt werden. Außerdem sollen die experimentell ermittelten Werte der Durchbiegung und der Axialdehnung mit den aus der Stoßkraft errechneten Werten verglichen werden.

Die Ausgabe von Ergebnissen in tabellarischer und diskret graphischer Form erfolgt auf einem Printer-Plotter der Fa. Hewlett-Packard vom Typ 9871A, der über ein Interface mit dem Rechner gekoppelt ist.

Um die Fehlermöglichkeiten zu reduzieren, werden pro Kugeldurchmesser und Stoßgeschwindigkeit bis zu acht Stoßkraftverläufe aufgenommen und weiterverarbeitet. Diese Vielzahl von Versuchen, durch die erst die Möglichkeit einer systematischen Untersuchung elastoplastischer Kontaktwechselwirkung geschaffen wird, ist nur mit einer Anlage zur Erfassung analoger Signale und deren automatischen digitalen Aufzeichnung, Speicherung und numerischen Weiterverarbeitung zu verwirklichen.

10. Vergleiche zwischen Theorie und Experiment

In umfangreichen Versuchen haben sich vier nicht genau abzugrenzende Geschwindigkeitsbereiche herausgestellt, die überwiegend vom verwendeten Kugeldurchmesser abhängen.

Bereich I : überwiegend elastisches Kontaktverhalten (keine ausgeprägten Krater)

Bereich II : elasto-plastische Verformung auf die Kontaktstelle begrenzt (Kraterbildung)

Bereich III : über die Kontaktstelle hinausgehende elasto-plastische Verformung (Zonenverformung)

Bereich IV : bleibende Verformung der Plattenunterseite (Strukturverformung)

Im unteren Geschwindigkeitsbereich (Bereich I: $v_o < 0{,}5$ m/s), in dem keine ausgeprägte Kraterbildung zu verzeichnen ist, überwiegt der elastische Anteil der Verformungsenergie von Platte und Kugel. Diese Aussage wird noch durch Stoßversuche bei $v_o < 0{,}5$ m/s bekräftigt.

Obwohl sich diese Messungen wegen der schlecht reproduzierbaren Stoßgeschwindigkeit (kleine Winkelauslenkungen des Stoßpendels erzeugen geringe Fallhöhen und somit große Fehlermöglichkeiten) schwierig gestalten, kann gezeigt werden, daß neben den in diesem Bereich gemessenen Stoßkräften auch die Durchbiegungen unter der Stoßstelle relativ höher sind. Außerdem zeigen Gegenüberstellungen der mit Hilfe des experimentellen Stoßkraftverlaufes $F(t)$ ermittelten gegenseitigen Annäherung $\alpha(t)$ mit Annäherungen, die nach dem Hertzschen Kontaktkraftgesetz berechnet wurden, daß beide Kurven-

verläufe im Bereich $0 < t < t_{\alpha_{max}}$ nahezu deckungsgleich sind.

Der Bereich II, in dem das hier vorgestellte Verfahren (Parameterbestimmung und vereinfachte Theorie) Gültigkeit besitzt und die experimentell ermittelten Werte der Stoßkräfte F(t), Durchbiegungen $W_o(t)$ und Biegungsmomente M_o (t) mit den theoretischen Werten im Rahmen der durch die Versuchsdurchführung bedingten Genauigkeiten übereinstimmen, läßt sich nur ungefähr abgrenzen. So erstreckt sich der Geschwindigkeitsbereich für den Kugeldurchmesser d_K=80 mm auf $0{,}50 < v_o < 1{,}50$ m/s, für d_K=70 mm auf $0{,}50 < v_o < 1{,}75$ m/s, für d_K=60 mm auf $0{,}50 < v_o < 2{,}00$ m/s und für d_K=50,8 mm auf $0{,}50 < v_o < 2{,}50$ m/s (siehe Bild 10.1).

Die vor dem Aufprall zum Zeitpunkt t=0 in der Stoßkugel gespeicherte kinetische Energie wird nach dem Kontakt zum Teil in plastische Verformungsenergie und kinetische Energie der Platte sowie in elastische Verformungsenergie der Kugel und der Platte umgewandelt. Die kinetische Energie beim Aufprall der Stoßkugel auf die Platte wird zum Teil in plastische Verformungsenergie umgewandelt. Die plastische Verformungsenergie ist unterhalb der oben angegebenen Grenzgeschwindigkeiten gerade so groß, daß die bleibenden Verformungen nur an der Kontaktstelle (Kraterbildung) auftreten. Oberhalb dieser Geschwindigkeitsbereiche kommen zu der Kraterbildung an der Kontaktstelle noch bleibende Verformungen des um den Stoßkrater gelegenen Plattenmaterials hinzu. Weiterhin sind bei Geschwindigkeiten $v_o > 3{,}00$ m/s, wie sie beim Stoß auf eine Aluminiumplatte durchgeführt werden, bleibende Verformungen an der Plattenunterseite gegenüber dem Stoßpunkt zu beobachten.[+)]

+) Erkennbar an der bleibenden Meßgitterverformung des unter der Stoßstelle an der Plattenunterseite angebrachten Dehnungsmeßstreifens.

Weiterhin wurde der Versuch unternommen, die vornehmlich für Energiebetrachtungen[+)] benötigte maximale elastische Abplattung der Kugel am Stoßpunkt abzuschätzen. Dazu kann man die geometrischen Abmessungen des nach dem Stoßvorgang zurückgebliebenen Kraters benutzen, die einen gewissen Aufschluß über die maximale Kugelabplattung geben können. Als Maß der Kugelabplattung wird hier näherungsweise der aus der Kratertiefe α_T und dem Kraterdurchmesser d_T mit Hilfe der Sehnengleichung des Kreisabschnittes berechenbare Krümmungsradius der verformten Kugel benutzt. Wie Bild 10.2 zeigt, ist der Krümmungsradius der verformten Stoßkugel wegen des geringeren Widerstandes, der dem Eindringen der Kugel entgegengesetzt wird, bei der Stoßkombination Stahl-Aluminium kleiner als bei der Stoßkombination Stahl-Messing. In der Nachgiebigkeit der Plattenstruktur ist ein Grund zu suchen, daß bei gleichen Stoßbedingungen wie Geschwindigkeit, Kugeldurchmesser und Material, der Krümmungsradius beim Blockstoß größer ist als der beim Stoß auf eine Platte.

Diese Überlegungen werden auch durch Betrachtungen der Stoßkraft-Annäherung-Beziehungen (siehe Bild 5.5 und 11.3) bestätigt. Beschränkt man sich bei den hier nicht näher erläuterten Energiebetrachtungen nur auf die kinetischen Energien von Kugel und Platte sowie auf Verformungsenergien von Kugel und Platte bzw. Block und läßt andere Energieanteile wie Wärmeenergie, Schallenergie usw. unberücksichtigt, so stellt die Fläche 2-3-4 in den oben genannten Bildern die elastische Verformungsenergie des Platten- bzw. Blockstoßes dar. Aus der quantitativen Gegenüberstellung dieser Flächen (siehe Bild 5.5) sieht man, daß die stattgefundene elastische Verformung

---

+) Diese hier nicht näher erläuterten Betrachtungen können u.a. zur Berechnung maximaler zentraler Durchbiegungen notwendig /56/ sein.

beim Stoß auf eine Messingplatte bei gleichen Stoßverhältnissen bedeutend größer ist als beim Stoß auf eine Aluminiumplatte. Sinngemäß kann man diese Überlegungen auch bei der Gegenüberstellung von Platten- und Blockstoß (siehe Bild 11.3) anstellen.

An dieser Stelle soll noch erwähnt werden, daß es für die Genauigkeit der Stoßkraftmessung wahrscheinlich besser ist, wenn der Beschleunigungsaufnehmer, der hier an der Kugel gegenüber der Stoßstelle befestigt wurde, im Schwerpunkt der Kugel positioniert wäre. Außerdem würde eine drahtlose Übertragung des Beschleunigungssignals vermutlich zu einer exakt einstellbaren Aufprallgeschwindigkeit führen, weil die relativ starre Kabelverbindung vom Geber zum Ladungsverstärker im unteren Geschwindigkeitsbereich einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Pendelbewegung der Stoßkugel hat.

Scheiterte die Anbringung des Beschleunigungsaufnehmers im Kugelmittelpunkt hier an der schlechten mechanischen Bearbeitungsmöglichkeit des Stoßkörpers aus gehärtetem Kugellagerstahl, so würde die drahtlose Übertragung der Signale wegen der mangelnden Kompaktheit des Senders Schwierigkeiten bereiten.

Der Unterschied, der zwischen gemessenem und berechnetem Durchbiegungsverlauf auftritt (siehe Bild 10.3 und 10.4), ist einerseits darauf zurückzuführen, daß in der hier dargestellten Theorie, wie in Kap. 1 schon erwähnt, nur die Momentendurchbiegung berücksichtigt wird. Andererseits können schon aus meßtechnischen Gründen Differenzen zwischen Theorie und Experiment erwartet werden, weil ein für die Plattenmittelfläche berechneter Durchbiegungsverlauf einem an der Plattenunterseite gemessenen Verlauf gegenübergestellt wird. Dagegen scheint die

flächenhafte Meßmethode des kapazitiven Wegaufnahmers trotz der während des Stoßvorganges gekrümmten Oberfläche der Plattenrückseite weniger fehlerbehaftet zu sein, wie punkthafte Kontrollmessungen mit einem Kontaktstift zeigen (siehe Bild 10.3). Beim Prinzip der Kontaktstiftmessung (siehe ausführlich /56/) bedient man sich einer federnd gelagerten mikrometrisch verstellbaren Elektrode und der Platte als Gegenelektrode. Da die Platte und der an der Plattenunterseite angebrachte Stift hier auf unterschiedlichem elektrischen Potential liegen, erfolgt bei Berührung der Elektroden eine Spannungsänderung, die auf dem Monitor eines Kathodenstrahloszilloskopes sichtbar gemacht werden kann. Die ablesbare Zeit der Spannungsänderung und der vorher einstellbare Abstand des Kontaktstiftes erlauben eine diskrete Messung des zeitlichen Durchbiegungsverlaufes. Der experimentell ermittelte Durchbiegungsverlauf enthält auch den Anteil der Querkraftverformung und muß aus diesem Grund größer als der theoretisch ermittelte Verlauf sein, wie auch Stoßuntersuchungen an Balken und Platten mit elastischem Kontaktverhalten /26/, /86/ ergeben haben.

Berechnet man die Zeitkonstante t_o über einen fiktiven Kontaktradius von h/2 und setzt diese zur Vermeidung einer Singularität in die Integralbeziehung zur Bestimmung des Biegungsmomentes ein, so stellt man fest, daß der errechnete Biegemomentenverlauf erheblich vom experimentell bestimmten Verlauf abweicht (siehe Bild 10.5). Erst die Benutzung der über die Stoßdauer gemittelten Kontaktfläche, berechenbar aus der gegenseitigen Annäherung (siehe Kap. 3), führte zu einer besseren Abschätzung der Zeitkonstante t_o. Die schon anfangs erwähnte Überschreitung des Geschwindigkeitsbereiches II führte bei der experimentell bestimmten maximalen Axialdehnung ab v_o=2,25 m/s (siehe Bild 10.4) zu einer starken Nichtlinearität des Kurvenverlaufes von $M_{omax}(v_o)$.

11. Schlußbemerkungen

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit kam es darauf an, eine vereinfachte Theorie des transversalen Stoßes einer kugelförmigen Masse auf eine Platte bei elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung abzuleiten. Dazu wurde die Plattendurchbiegung und später die Krümmung der Platte unter dem Stoßpunkt nicht wie üblich durch eine unendliche Reihe, sondern näherungsweise durch eine einfache Integralbeziehung berechnet.

Der Ersatz der unendlichen Reihe durch die einfache Integralbeziehung besitzt aber nur für das Frühstadium der Kontaktwechselwirkung Gültigkeit, in dem die von der Einspannung reflektierten Wellen noch keinen merklichen Einfluß auf das Stoßgeschehen an der Kontaktstelle haben. Diese Annahme trifft aber, wie umfangreiche Versuche gezeigt haben, für die in der Praxis vorkommenden Fälle durchaus zu, so daß man das hier vorgestellte Stoßproblem als unabhängig von den Randbedingungen und den Längsabmessungen der Platte betrachten darf.

Die als Ergebnis dieser Arbeit zur Verfügung gestellten Berechnungsunterlagen können somit auch für andere Plattenformen und Einspannbedingungen verwendet werden. Die Zufuhr relativ geringer Stoßenergie führt bei den gängigsten in der Technik vorkommenden Materialkombinationen schon zu einer Kraterbildung an der Stoßstelle, an der sich elasto-plastische Kontaktwechselwirkungen abgespielt haben. Für diese Art der Belastung kann man das nur für elastische Verformungsvorgänge gültige Hertzsche Kontaktkraftgesetz nicht mehr verwenden (siehe Bild 11.1 - 11.8)

Aus diesem Grund war ein wichtiger Punkt innerhalb

dieser Arbeit, die Parameter der hier zur Anwendung kommenden elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze für verschiedene Materialkombinationen, Kugeldurchmesser und Stoßgeschwindigkeiten auf experimentell- numerischem Wege zu bestimmen.

Mit Hilfe des vereinfachten Ausdrucks für die Durchbiegung und der hier auf dynamischem Wege bestimmten Parameter der Kontaktkraftgesetze ist dann eine gute Beschreibung des elasto-plastischen Stoßgeschehens möglich. So kann man mit der Bewegungsgleichung der Stoßmasse und den elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzen, sowie der einfachen Integralbeziehung für die Plattendurchbiegung unter dem Stoßpunkt die Schwerpunktsannäherung von Stoßkugel und gestoßenem Plattenelement berechnen, aus der man die Stoßkraft für die Belastung und Entlastung bestimmen kann.

Die nach der hier vorgestellten Methode bestimmten Parameter der Kontaktkraftgesetze und die bleibenden Annäherungen ermöglichen die Erstellung von Berechnungsunterlagen in Form dimensionsloser Stoßkraftkurven, welche durch Stoßkennzahlen charakterisiert sind. Diese für den jeweiligen Belastungsfall aus wichtigen Stoßdaten berechenbaren Stoßkennzahlen ermöglichen in Verbindung mit den dimensionslosen Stoßkraftkurven eine schnelle Abschätzung maximaler Stoßkräfte.

Ferner können aus diesen dimensionslosen Stoßkraftverläufen durch einfache Integralbeziehungen noch dimensionslose Durchbiegungskurven und dimensionslose Biegungsmomentkurven berechnet werden, die wiederum durch die Stoßkennzahl λ charakterisiert sind. Das so zur Verfügung gestellte Kurvenmaterial ermöglicht daher eine bequeme Abschätzung der Belastungsgrößen wie sie beim transversalen Stoß auf eine Platte mit elasto-plasti-

scher Kontaktwechselwirkung auftreten.

Obwohl in der hier dargestellten Theorie der vereinfachte Ausdruck für die Durchbiegung unter dem Stoßpunkt aus der Lösungsfunktion der einfachen Plattenschwingungsgleichung gewonnen wurde, (Rotationsträgheit, Dämpfung, Schallenergie, Wärmeentwicklung usw. finden hier keine Berücksichtigung) kann man, wie die Gegenüberstellungen theoretisch ermittelter und experimentell bestimmter Belastungsgrößen zeigen, von guten Übereinstimmungen sprechen.

Da die vereinfachte Theorie nur die Momentendurchbiegung, nicht aber die durch die Querkraft hervorgerufene Durchbiegung berücksichtigt, ist davon auszugehen, daß ein gewisser systematischer Fehler bei der Parameterbestimmung der Kontaktkraftgesetze auftritt, der aber vermutlich wegen des bei dünnen Platten (hier: $R/h \approx 35$) geringen Querkraftanteils außerhalb der Stoßstellenumgebung vernachlässigbar klein ist.

Die Unterschiede zwischen gemessener Axialdehnung und berechenbarer Biegedehnung unterhalb der Stoßstelle sind wie schon erwähnt, auf zusätzliche Wirkungen der Stoßkraft nahe der Stoßstelle zurückzuführen. Man wird bei vollständiger Erfassung des durch die Biegebeanspruchung hervorgerufenen Verformungszustandes die durch die Wirkung der Stoßkraft als Einzellast entstehenden Nahfelder der Verformung mit in die Betrachtungsweise einbeziehen müssen. Es darf an dieser Stelle, ohne näher auf die Nahfeldtheorie /87/ eingehen zu wollen, nicht unerwähnt bleiben, daß die statischen Theorien des Nahfeldes auch für den dynamischen Belastungsfall benutzt werden können, wie Untersuchungen an quergestoßenen Balken /86/ gezeigt haben.

Trotz der bei der Beschreibung der Stoßvorgänge vorge-

nommenen Idealisierungen sprechen die durch das hier dargestellte Verfahren erhaltenen Entlastungsexponenten von etwa q=1,5 , die im Sinne der Hertzschen Theorie zu erwarten waren, für eine gewisse Leistungsfähigkeit dieser experimentell-numerischen Methode.

Bei der Verwendung der hier bestimmten Parameter der elasto-plastischen Kontaktkraftgesetze zu Bestimmung der Stoßkraft sind keine merklichen systematischen Fehler aufgetreten, wie die gute Übereinstimmung theoretisch und experimentell bestimmter Stoßkraftverläufe zeigt. Man kann also davon ausgehen, daß die hier angewendete numerische Näherungsmethode zur Bestimmung der Parameter für stoßartige Belastung von Platten mit elasto-plastischer Kontaktwechselwirkung geeignet ist.

Die vorliegende Arbeit soll einerseits einen Beitrag zu vereinfachten Berechnung schlagartig belasteter Bauelemente liefern, sowie andererseits eine Methode zur Parameterbestimmung von elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzen vorstellen.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß in Kap. 12 neben dem in dieser Arbeit zitierten Schrifttum noch einschlägige Fachbücher sowie wichtige Abhandlungen aufgeführt sind, die mit den hier behandelten Themen in Zusammenhang stehen und somit ein weitergehendes Studium dieser Probleme erlauben.

12. Schrifttum

[1] TIMOSHENKO, S.P. — Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken, Z. Math. Phys. 62 (1913), Nr. 2, S. 198-209

[2] KARAS, K. — Platten unter seitlichem Stoß, Ing.-Archiv 10 (1939), Nr. 4, S. 237-250

[3] BOUSSINESQ, J.N. — Application des potentiels à l' étude de l' équilibre et du mouvement des solides élastiques, Gauthier-Villars, Paris (1885), S. 464-480 (Neue Ausgabe von A. Caquot, Librairie Scientifique et Technique A. Blauchard, Paris (1969))

[4] ZENER, C. — The Intrinsic Inelasticity of Large Plates, Phys. Rev. 59 (1941), Nr. 2, S. 669-673

[5] TILLET, J.P.A. — A Study of the Impact of Spheres on Plates, Proc. Phys. Soc., London 67 (1954), Nr. 9, S. 677-688

[6] ERINGEN, A.C. — Transverse Impact on Beams and Plates, J. Appl. Mech. 20 (1953), Nr. 4, S. 461-468

[7] PRESCOTT, J. — Applied Elasticity, Dover Publications, New York (1946), S. 210-213, S. 597-598

[8] COLLATZ, L. — Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer-Verlag, Berlin (1955)

[9] SZABO, I. — Höhere Technische Mechanik, Springer-Verlag, Berlin (1972)

[10] GOLDSMITH, W. — Impact, The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids, Edward Arnold, London (1960)

[11] NOWACKI, W. — Baudynamik, Springer-Verlag, New York (1974)

[12] TIMOSHENKO, S. YOUNG, D.H. WEAVER, W. — Vibration Problems in Engineering, John Wiley + Sons, New York (1974)

[13] GIRKMANN, K. — Flächentragwerke, Springer-Verlag, Wien (1963)

[14] TIMOSHENKO, S. WOINOWSKI-KRIEGER, S. — Theory of Plates and Shells, International Student Edition Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York (1959)

[15] ROTHE, R. SZABO, I. — Höhere Mathematik, Teil IV, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1965)

[16] BRIGGS, L.J. Methods for Measuring the Coefficient of Restitution and the Spin of a Ball, Journal of Research of the National Bureau of Standards 34 Jan. (1945), S. 1-23

[17] COLWELL, R.C.
HARDY, H.C. The Frequencies and Nodal Systems of Circular Plates, Phil. Mag. Ser. 7, 24 (1937), Nr. 165, S. 1041-1055

[18] ANDREWS, J.P. Experiments on Impact, Proc. Phys. Soc. London 43 (1931), S. 8-17

[19] BARNHART, K.E.
GOLDSMITH, W. Stresses in Beams During Transverse Impact, J. Appl. Mech. 24 (1957), S. 440-446

[20] CAMPBELL, J.D. An Investigation of the Plastic Behaviour of Metal Rods Subjected to Longitudinal Impact, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1 (1953), S. 113-123

[21] CAMPBELL, J.D. The Yield of Mild Steel Under Impact Loading, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 3 (1954), S. 54-62

[22] ZURMÜHL, R. Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Springer-Verlag, Berlin (1965)

[23] VINSON, J.R. Structural Mechanics: The Behavior of Plates and Shells, John Wiley + Sons, New York (1974)

[24] TABOR, D. The Hardness of Metals, The Clarendon Press, Oxford (1951)

[25] SNEDDON, I.N. The Symmetrical Vibrations of a Thin Elastic Plate, Proc. Camb. Phil. Soc. 41 (1945), S. 27-43

[26] SCHWIEGER, H. Vereinfachte Theorie des elastischen Biegestoßes auf eine dünne Platte und ihre experimentelle Überprüfung, Forsch. Ing. Wes. 41 (1975) Nr. 4, S. 122-132

[27] SCHWIEGER, H. Maximale Beanspruchung schlagartig belasteter elastischer Platten, Deutsche Luft- u. Raumfahrt Report (1966), Nr. 66-33

[28] SCHMIDT, B. Kontaktkraft und Biegespannungen in quergestoßenen Balken, Dissertation TH Darmstadt (1966)

[29] KISCHKAT, W. Beitrag zur experimentellen Untersuchung eines transversalen Stoßes auf dünne Platten, Dissertation TH Stuttgart (1971)

[30] ESCHLER, H. Beitrag zur elementaren Theorie des Querstoßes auf Stäbe und Platten, Ing. Arch. 12 (1941), S. 31-37

[31] SCHWIEGER, H. REIMANN, V. Spannungsoptische Untersuchung des Querstoßes auf eine Kreisplatte, ZAMM 39 (1959), S. 198-213

[32] SCHWIEGER, H. REIMANN, V. Der Biegestoß auf eine elastische Rechteckplatte, Forsch. Ing. Wes. 30 (1964), S. 140-144

[33] MAIDEN, C.J. The Stresses Produced in a Thin Elastic Plate by a Transverse Impulsive Force, Phil. Mag. 3 (1958), S. 1313-1423

[34] LOVE, A.E.H. The Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York (1944)

[35] HERTZ, H. Über die Berührung fester elastischer Körper, J. reine angew. Math. (Crelle) 92 (1881), S. 156-171

[36] GILG, B. Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünnen Platten, Dissertation E.T.H. Zürich (1962)

[37] FLETSCHER, H.J.
THORNE, C.J.
Thin Rectangular Plates on Elastic Foundation, J. Appl. Mech. Trans. ASME 3, 74 (1952), S. 361-368

[38] NADAI, A.
Die elastischen Platten, Springer-Verlag, Berlin (1968)

[39] FÖPPL, L.
Der Spannungszustand und die Anstrengung des Werkstoffes bei der Berührung zweier Körper, Forsch. Ing. Wes. 7 (1936), Nr. 5, S. 209-221

[40] DAVIES, R.M.
The Determination of Static and Dynamic Yield Stresses Using a Steel Ball, Proc. Roy. Soc. London, Series A 197 (1949), S. 416-432

[41] CROOK, A.W.
A Study of Some Impacts Between Metal Bodies by a Piezo-Electric Method, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 212 (1952), S. 377-390

[42] SONNTAG, G.
Der symmetrische Biegestoß gegen eine Kreisplatte, Forsch. Ing. Wes. 14 (1943), Nr. 6, S. 137-148

[43] MORI, D.
Lateral Impact on Bars and Plates, Proc. Soc. Stress Anal. 15 (1957), Nr. 1, S. 171-178

[44] MINDLIN, R.D. Compliance of Elastic Bodies in Contact, J. Appl. Mech. 16 (1949), S. 259-268

[45] JOHNSON, Cl. An Elasto-Plastic Contact Problem, RAIRO Anal. 12 (1978), Nr. 1, S. 59-74

[46] ANDREWS, J.P. Theory of Collisions of Spheres of Soft Metals, Phil. Mag., London 9 (1930), Nr. 7, S. 593-610

[47] RAYLEIGH, J.W.S. On the Production of Vibrations by Forces of Relatively Long Duration, With Applications to the Theory of Collisions, Phil. Mag., London 11 (1906), Nr. 6, S. 283-291

[48] DASGYPTA, G.
KELLY, J.M. Analysis of Localized Dynamic Contact on Structures Using Matched Asymptotic Expansions, J. Struct. Mech. 6 (1978), Nr. 1, S. 29-44

[49] WARBURTON, G.B. The Dynamical Behaviour of Structures, Second Edition, Pergamon Press, Oxford (1976)

[50] LEHMANN, TH. Elemente der Mechanik IV Schwingungen, Variationsprinzipe, Studienbücher Naturwissenschaft und Technik, Vieweg u. Sohn, Braunschweig (1979)

[51] FILLIPOV, A.P. — Transverse Elastic Impact of a Heavy Body on a Circular Plate, Mekhanika Tverdogo Tela 6 (1971), S. 83

[52] WATSON, G.N. — The Theory of Bessel Functions, Chap. VII, Cambridge University Press (1958)

[53] GRÖBNER, W. HOFREITER, N. — Integraltafel, Teil II, Springer-Verlag, Berlin (1966)

[54] KREYSZIG, E. — Über den allgemeinen Integralsinus Si (z,α), Acta Math. 85 (1951), S. 117-181

[55] MITTAL, R.K. SCHWIEGER, H. TRUPPAT, V. — A Simplified Analysis of Transverse Impact on Clamped Circular Plates Part I/II, Journal of Aero. Soc. of India 28 (1976), Nr. 3, S. 265-282

[56] SCHWIEGER, H. HAHN, H. — Maximale Belastung und Energieumwandlung bei einem transversalen elastischen Stoß auf eine Kreisplatte, Fortschrittberichte der VDI-Z. 1 (1978), Nr. 53

[57] SCHWIEGER, H. DOMBROWSKI, H. — Vereinfachte Theorie des Biegestoßes auf einen Balken bei elasto-plastischem Kontaktkraftgesetz, Fortschrittberichte der VDI-Z. 1 (1980), Nr. 64

[58] DENGLER, M.A. — Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung, Österr. Ing. Arch. 10 (1956), S. 39-66

[59] SCHWIEGER, H. TRUPPAT, V. HAHN, H. — Central Deflection of a Transversely Struck Clamped Circular Plate, Mech. Research Comm. 3 (1976), S. 13-19

[60] OLSSON, R.G. — Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung, Österr. Ing. Arch. 12 (1958), Nr. 2, S. 93-99

[61] KOLSKY, H. — Stress Waves in Solids, Dover Publications, New York (1963)

[62] SCHWIEGER, H. DOMBROWSKI, H. — Das elasto-plastische Kontaktkraftgesetz beim Biegestoß auf einen Balken, Ber. der 6. Int. Konferenz Exp. Spannungsanalyse, München, 18.-21. Sept. (1978) (VDI-Ber. Nr. 313, (1978) S. 665-674)

[63] SCHWIEGER, H. DOMBROWSKI, H. — Eine Methode zur Bestimmung der Parameter des elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzes beim Balkenbiegestoß, Materialprüf. 22 (1980), Nr. 2, S. 61-64

[64] SCHWIEGER, H.
DOMBROWSKI, H.
Der transversale Stoß auf einen Balken unter Berücksichtigung des elasto-plastischen Kontaktkraftgesetzes. Eine vereinfachte Theorie und ihre experimentelle Überprüfung, The II-nd Nat. Symposium of Exp. Stress Analysis Cluj-Napoca, June, 11.-14. (1980), Romania

[65] WALLER, H.
KRINGS, H.
Matrizenmethoden in der Maschinen- u. Bauwerksdynamik, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1975)

[66] GIL'MAN, L.S.
Theoretical and Experimental Investigation of the Stresses in Plates by Short-Time Loading, Stroit. mekhan, i' raschet Sooruzh. 4 (1960), Nr. 1, S. 15-22

[67] WILSHAW, T.R.
KELLY, J.M.
Response of Circular Clamped Plates to Square-Wave Stress Pulses, Exp. Mech. 8 (1968), Nr. 10, S. 450-458

[68] SCHWARTZ, J.
HARPER, E.J.
On the Relative Approach of Two-Dimensional Elastic Bodies in Contact, Int. J. Solids Structures (1971), Nr. 7, S. 1613-1626

[69] SHIN-ISCHI- SUZUKI — Dynamic Response of Circular Plates Subjected to Transverse Impulsive Loads, Ing. Arch. 40 (1971), Nr. 2, S. 131-144

[70] SCHUMANN, W. — Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint. Venant´sche Prinzip, speziell mit Anwendung auf die Plattentheorie, Publications du Laboratoire de Photoélasticité EPF, Zürich parues aux Editions, Leemann, Zürich (1955), Nr. 6

[71] YEW, C.H. GOLDSMITH, W. — Stress Distributions in Soft Metals Due to Static and Dynamic Loading by a Steel Sphere, J. Appl. Mech. 31 (1964), Nr. 4, S. 635-646

[72] DUFFEY, T.A. KEY, S.W. — Experimental-Theoretical Correlations of Impulsely Loaded Clamped Circular Plates, Exp. Mech. 9 (1969), Nr. 6, S. 241-249

[73] NOWAK, B. — Der Einfluß kurzzeitiger Belastungen auf Stahlbetonbalken und -platten, Konstr. Ingenieurbau Berichte 9 (1971)

[74] O´SULLIVAN, M.J. An asymptotic Analysis of the Gentle Dynamic Loading of an Elastic Plate, Int. J. Solids Structures 7 (1971), Nr. 10, S. 1395-1409

[75] SCHWIEGER, H.
TRUPPAT, V. Biegewellenausbreitung in einer transversal gestoßenen Platte sichtbar gemacht mit dem spannungsoptischen Oberflächenschichtverfahren und Bestimmung des Spannungszustandes mittels der Äquidensitometrie, Materialprüf. 20 (1978), Nr. 3, S. 100-107

[76] CLARK, D.S. The Behavior of Metals Under Dynamic Loading, Transactions of the ASME 46 (1954), S. 34-61

[77] KUNUKKASSERIL, V.X.
CHANDRASEKHARAN, K. Concentrated-Impact Loading of Circular Plates, Exp. Mech. 15 (1975), Nr. 11, S. 424-428

[78] REISSNER, E. On the Theory of Bending of Elastic Plates, J. Math. Phys. 23 (1944), S. 184-191

[79] KASHCHEEV, V.N.
MAKSAK, V.I.
KHOKHLOV, V.A. Hertz Problem for Contact of Bodies Under Conditions of Adhesion Interaction, Izv. AN SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela 14 (1979), Nr. 3, S. 182-184

[80] KIRCHHOFF, G. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, J. reine angew. Math. 40 (1850), S. 51-88

[81] BRONSTEIN, I. SEMENDJAJEW, K. — Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1960)

[82] SCHWIEGER, H. DOMBROWSKI, H. — Der elasto-plastische Biege- auf einen Balken, ZAMM 60 (1980), T 152-T 154

[83] ROTHE, R. — Höhere Mathematik Teil III, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1962)

[84] MINDLIN, R.D. — Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J. Appl. Mech. 18 (1951), S. 31-38

[85] GELLERT, W. KÜSTNER, H. HELLWICH, M. KÄSTNER, H. — Kleine Enzyklopädie Mathematik, Pfalz Verlag, Basel (1966)

[86] SCHWIEGER, H. TRUPPAT, V. — Der zentrale Biegestoß auf einen Balken - Eine vereinfachte Theorie und ihre experimentelle Überprüfung - , Fortschrittberichte der VDI-Z 1 (1976), Nr. 45

[87] TIMOSHENKO, S.P.
GOODIER, I.N.
Theory of Elasticity,
Mc Graw-Hill Book Company,
Inc., New York (1970),
S. 97-119

[88] SCHAEFER, C.
PÄSLER, M.
Einführung in die theoretische Physik,
Walter De Gruyter + Company,
Berlin (1970)

[89] MOSSAKOVSKII, V.I.
Compression of Elastic Bodies under Conditions of Adhesion,
Appl. Math. and Mech. 43
(1980), S. 630-643

[90] WILLERS, F.A.
Die erste Variation der Formänderungsarbeit ausgebeulter ebener Platten,
ZAMM 20 (1940), S. 118-121

13. Bilder und Tabellen

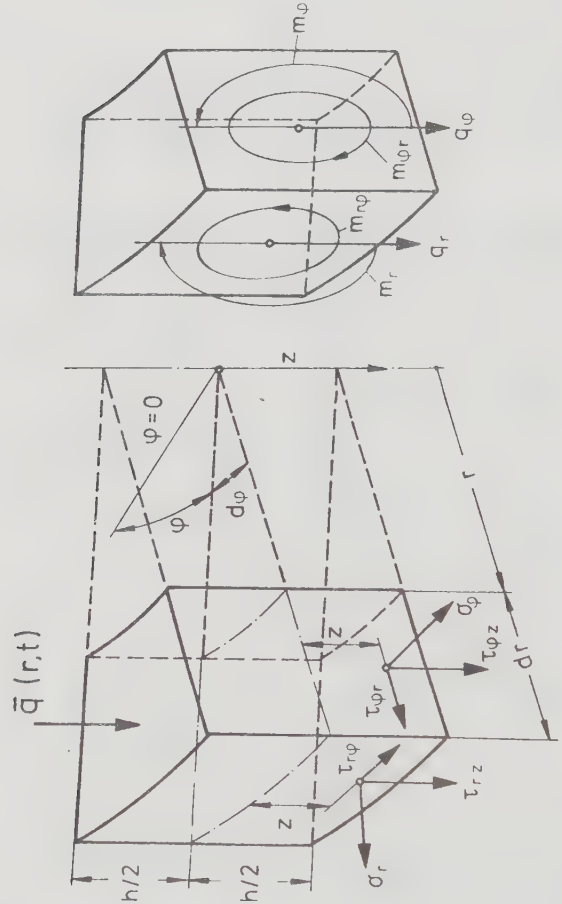


Bild 2.1 Spannungszustand eines belasteten Plattenelementes

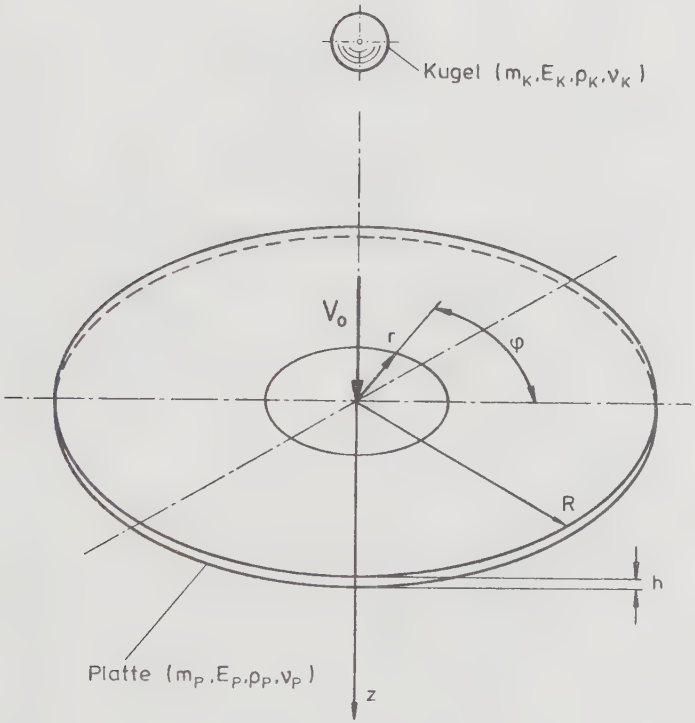


Bild 2.2 Schema des transversalen Plattenstoßes

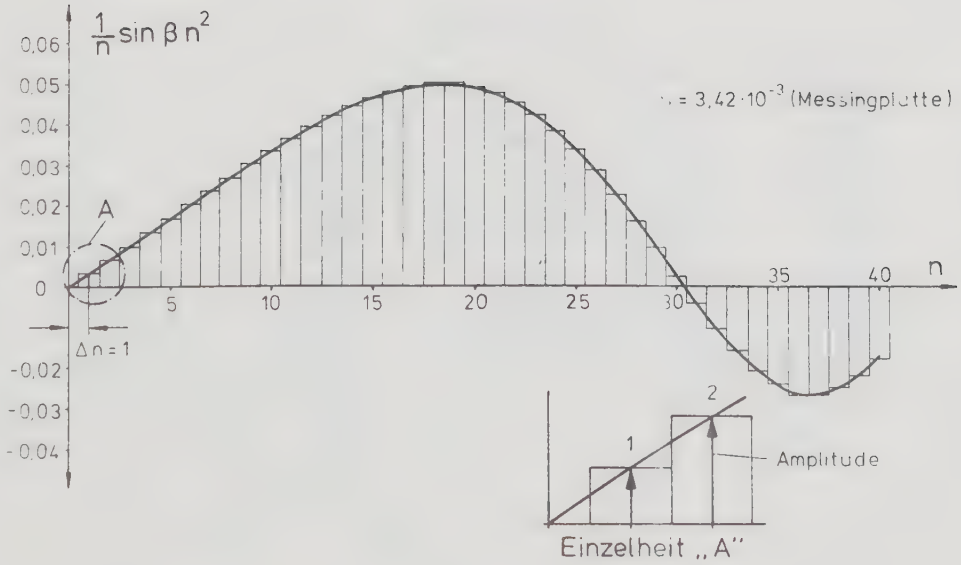


Bild 2.3 Glieder der unendlichen Reihe (Durchbiegung) aufgetragen als Amplitudenwerte ($0 \leq n \leq 40$)

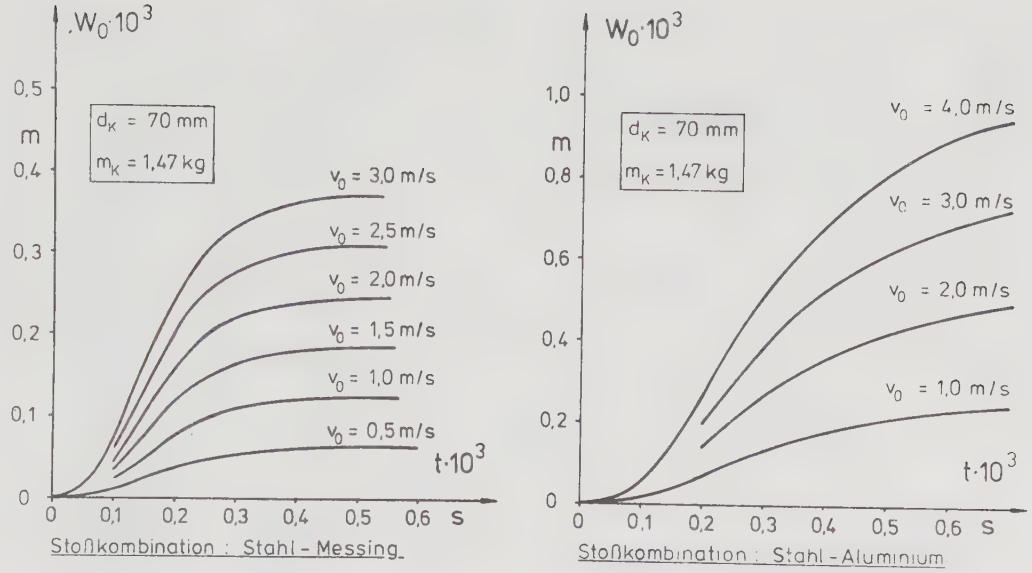


Bild 2.4 Plattendurchbiegung $W_o(t)$ unter dem Stoßpunkt für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten v_o, berechnet aus theoretischem Stoßkraftverlauf F (t)

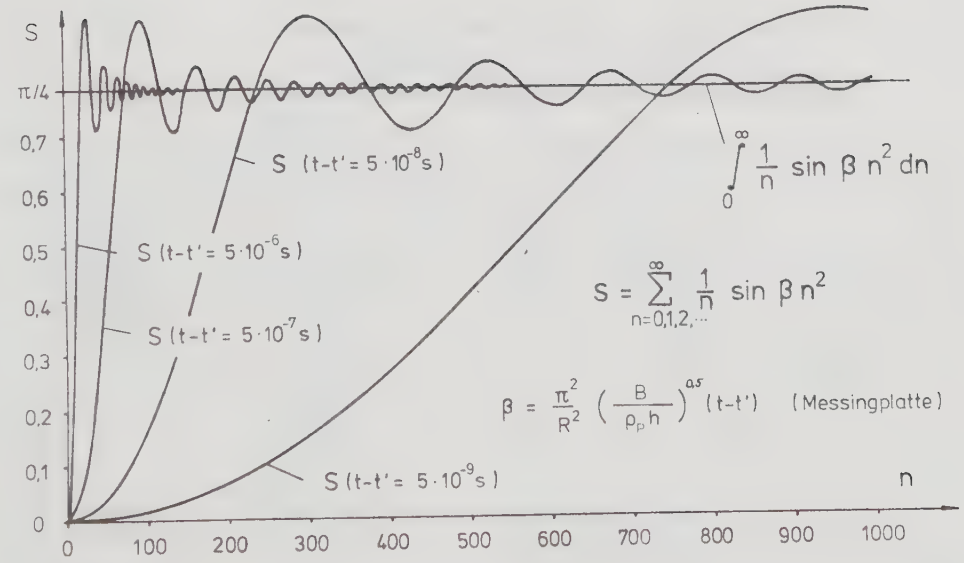


Bild 2.5 Summenwerte (Durchbiegung) als Funktion der Laufvariablen n
$(5.10^{-9}\,s \leq (t-t') \leq 5.10^{-6}\,s)$

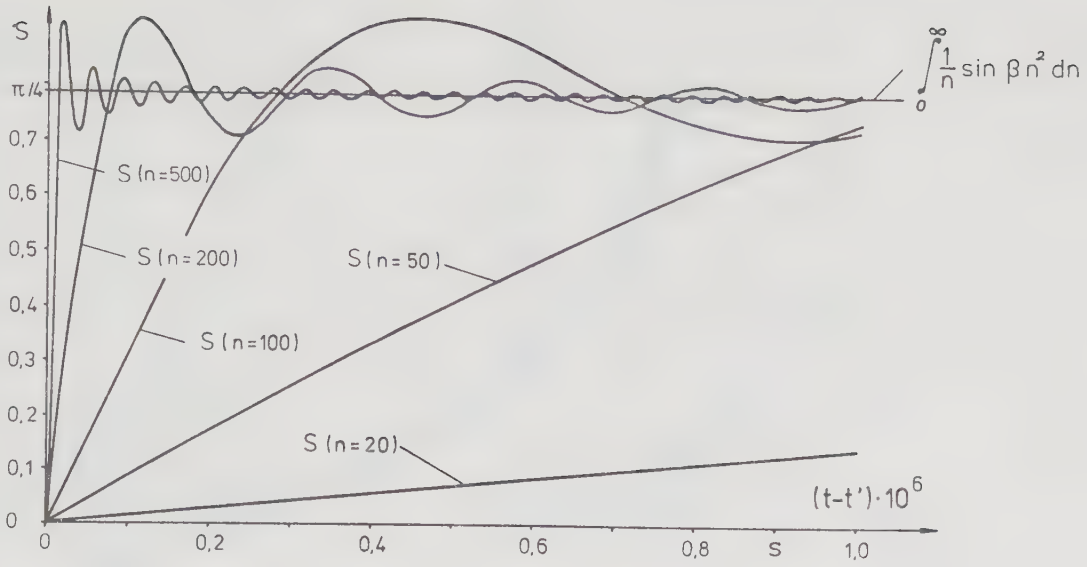


Bild 2.6 Summenwerte (Durchbiegung) als Funktion der Zeitdifferenz t-t' ($0 \triangleq (t-t') \triangleq 1.10^{-6}$s)

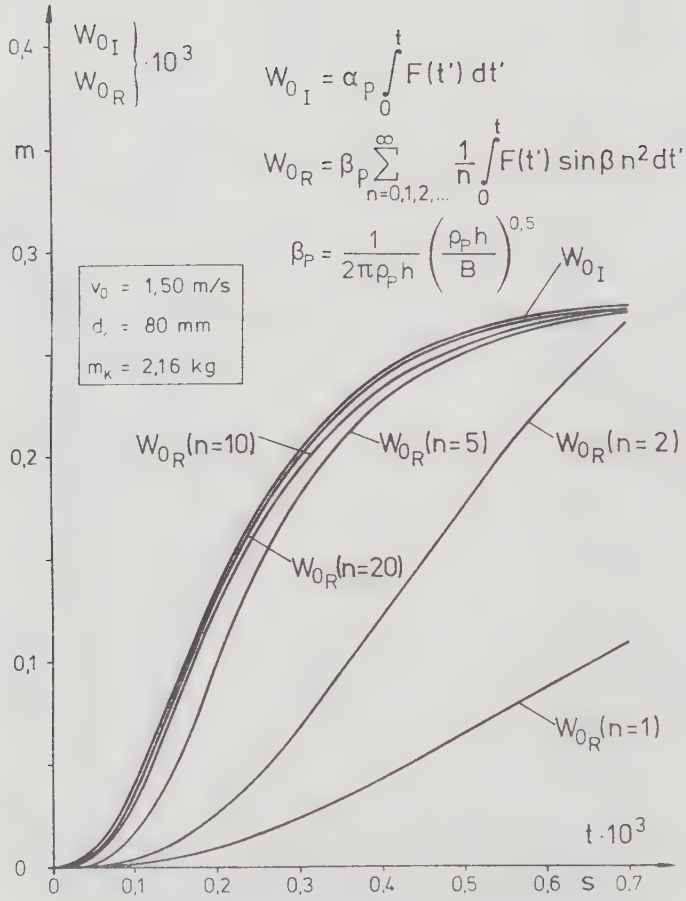


Bild 2.7 Vergleich der unendlichen Reihe mit dem Integralausdruck für die Plattendurchbiegung $W_o(t)$, die jeweils aus einem gemessenen Stoßkraftverlauf berechnet wurde

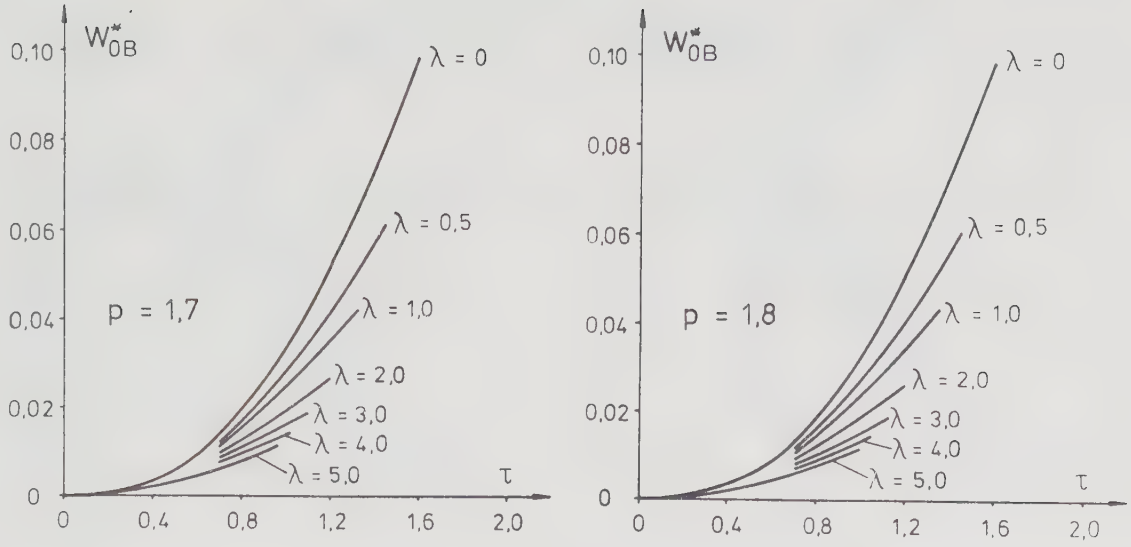


Bild 2.8 Dimensionslose Plattendurchbiegung $W^*_{oB}(\tau)$ berechnet aus der dimensionslosen Stoßkraft $\sigma^p_B(\tau)$ für verschiedene Stoßparameter λ und Belastungsexponenten p

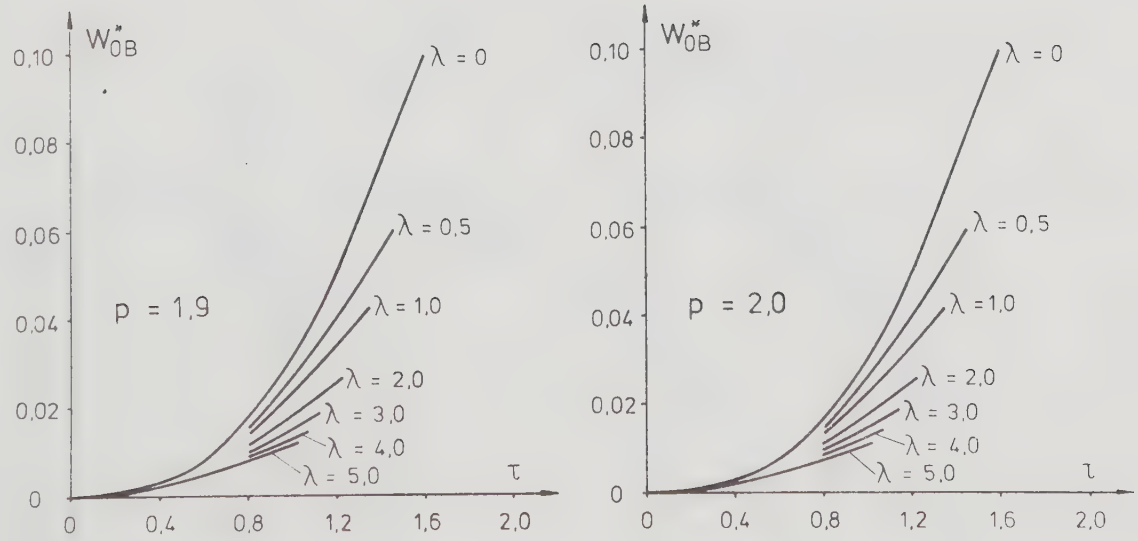


Bild 2.9 Dimensionslose Plattendurchbiegung $W^*_{oB}(\tau)$ berechnet aus der dimensionslosen Stoßkraft $\sigma^p_B(\tau)$ für verschiedene Stoßparameter λ und Belastungsexponenten p

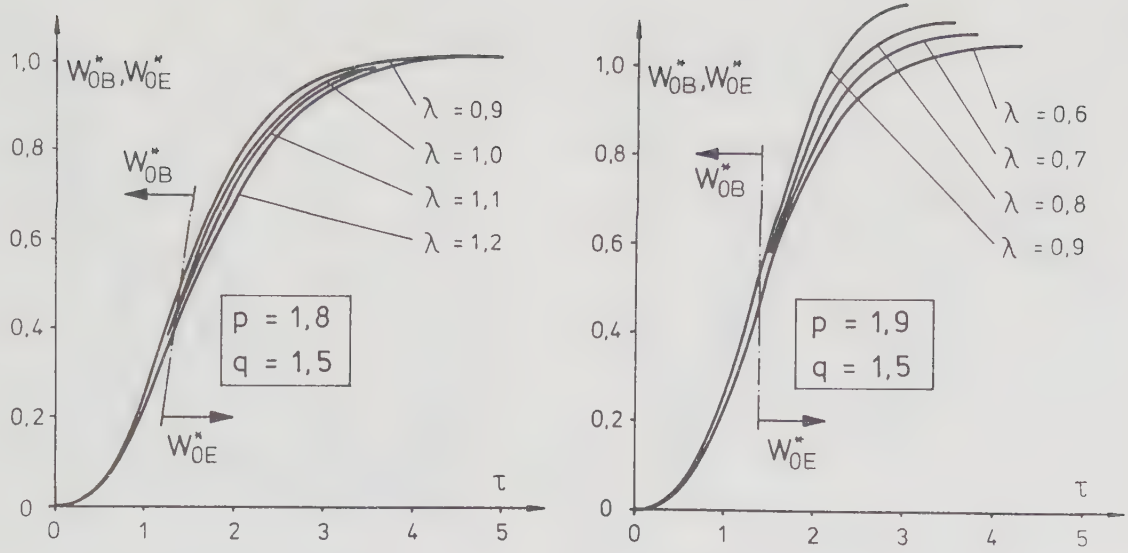
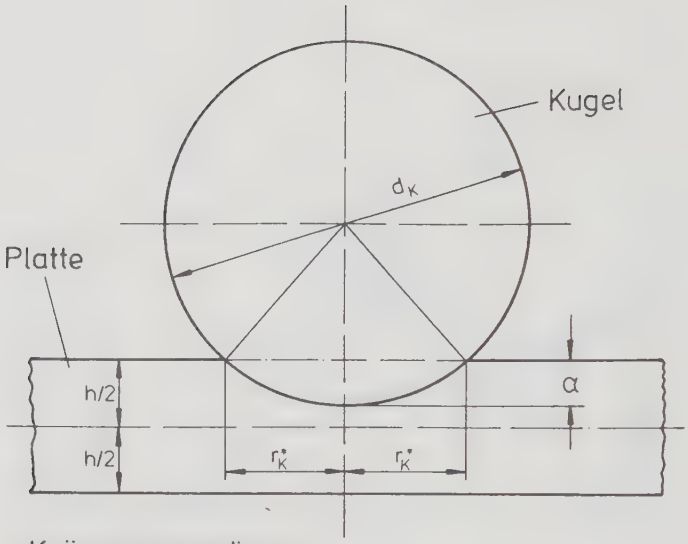


Bild 2.10 Dimensionslose Plattendurchbiegung W^*_{oB} bzw. W^*_{oE} als Funktion der dimensionslosen Zeit τ für verschiedene Parameter der Kontaktkraftgesetze



Krümmungsradius r_K^*:

(1) $r_K^* = h/2$

(2) $r_K^* = \sqrt{d_K 0{,}75\alpha_{max} - (0{,}75\alpha_{max})^2}$

(3) $r_K^*(t) = \sqrt{d_K \alpha(t) - \alpha(t)^2}$

Zeitkonstante t_0:

$$t_0 = \frac{r_K^{*2}}{4} \left(\frac{\rho_P\, h}{B}\right)^{0,5}$$

Bild 3.1 Eindringvorgang einer starren Kugel in eine weiche Platte ($0{,}75 \cdot \alpha_{max}$ = zeitlicher Mittelwert im Intervall $0 \leq t_{K1}$ der gegenseitigen Annäherung $\alpha(t)$)

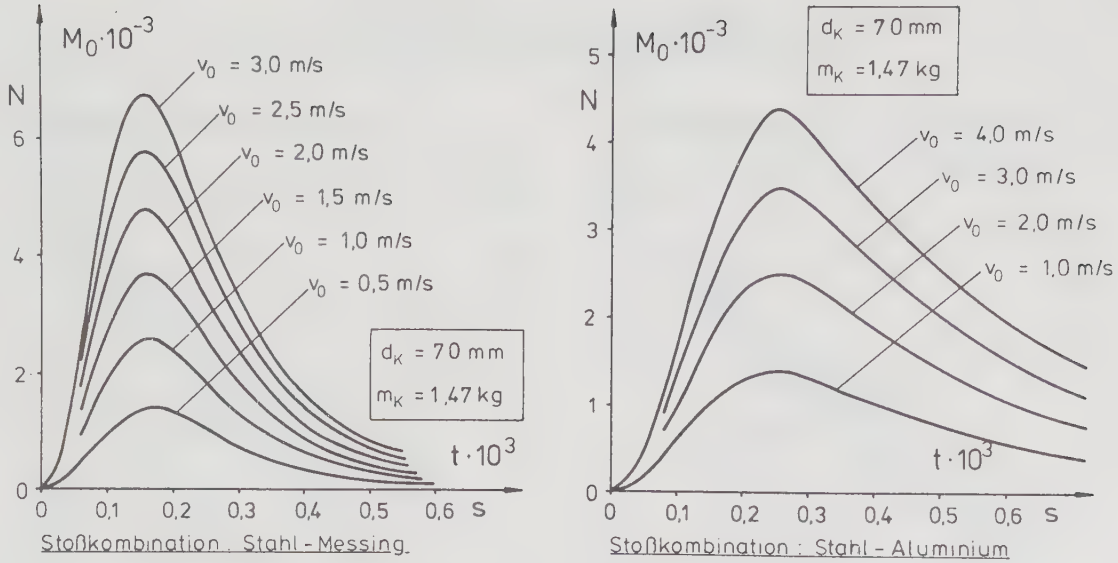


Bild 3.2 Biegungsmoment $M_o(t)$ unter dem Stoßpunkt, berechnet aus theoretisch ermitteltem Stoßkraftverlauf $F(t)$ für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten v_o (t_o aus $0{,}75 \cdot \alpha_{max}$ berechnet)

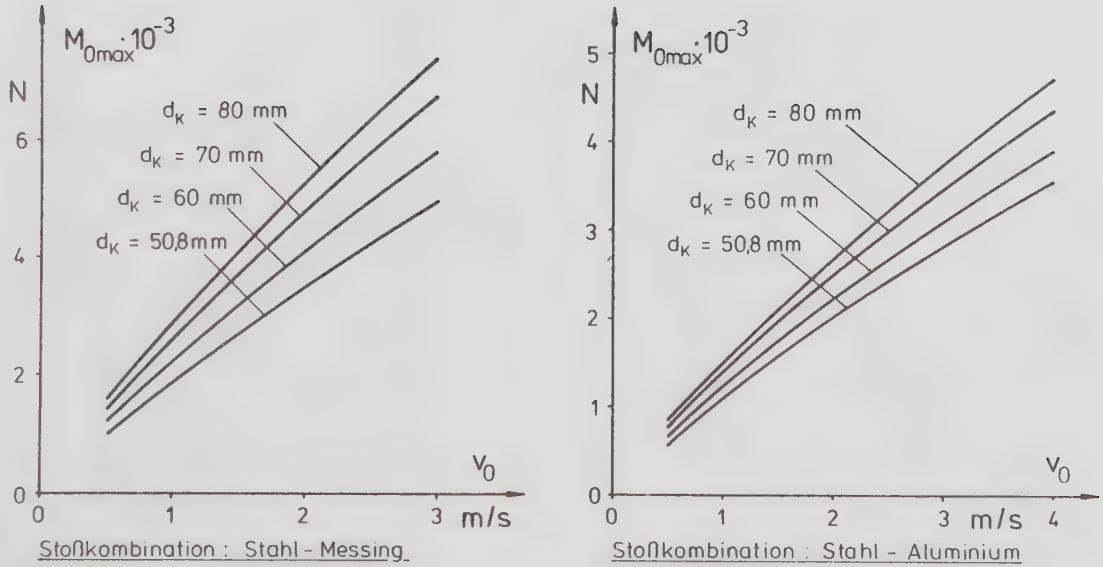


Bild 3.3 Maximales Biegungsmoment $M_{omax}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K

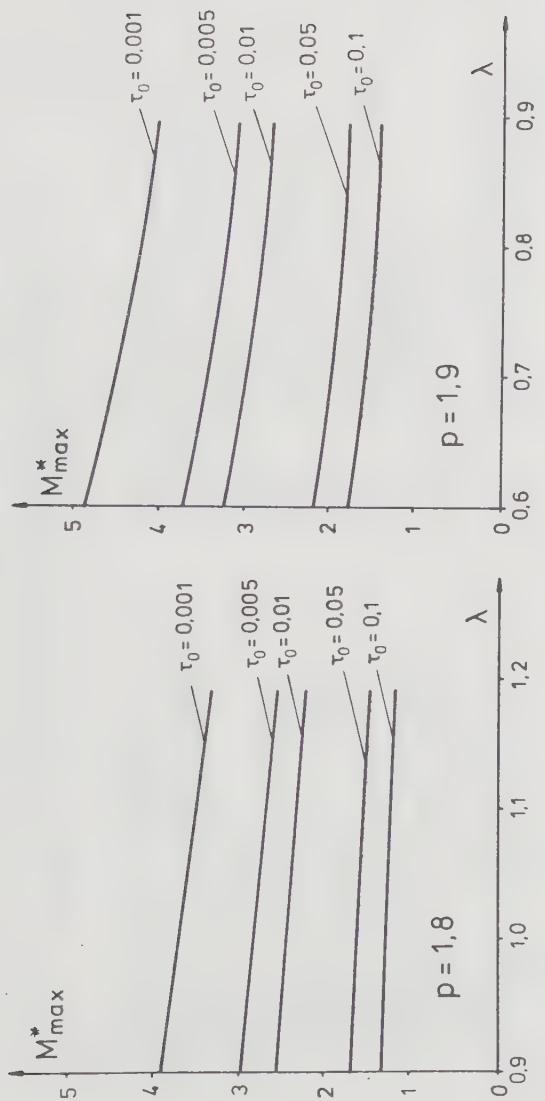


Bild 3.4 Maximales dimensionsloses Biegungsmoment $M^*_{max}(\lambda)$ für verschiedene Zeitkonstanten τ_o

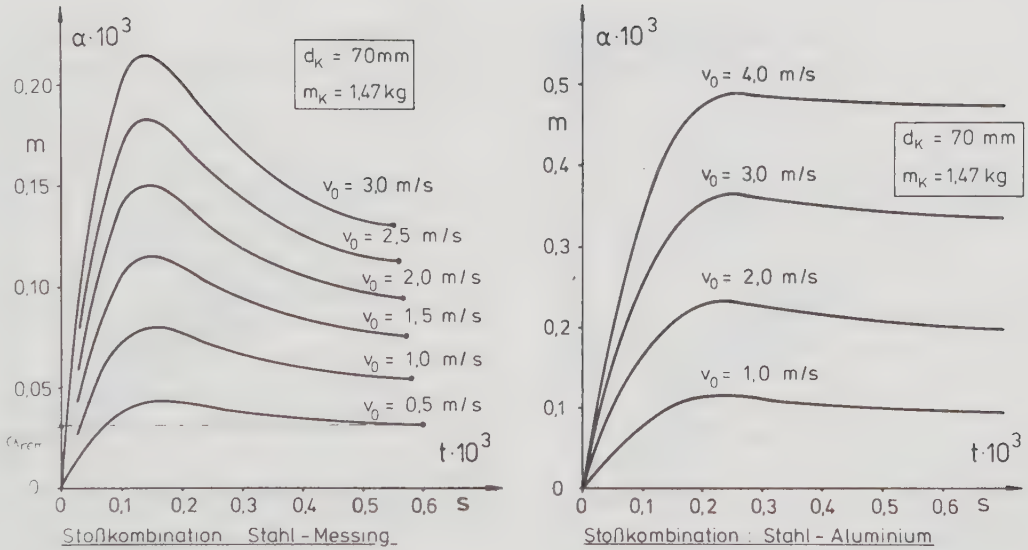


Bild 4.1 Gegenseitige Annäherung α(t) beim Plattenstoß für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten v_o (berechnet aus theoretischem Stoßkraftverlauf F(t))

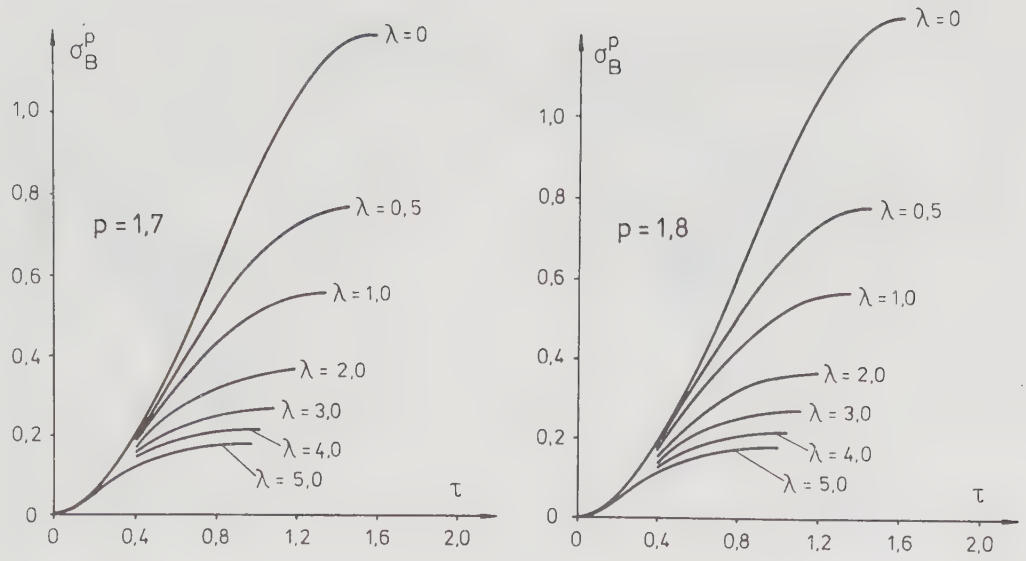


Bild 4.2 Dimensionslose Stoßkraft $\sigma_B^p(\tau)$ für verschiedene Stoßkennzahlen λ und Belastungsexponenten p

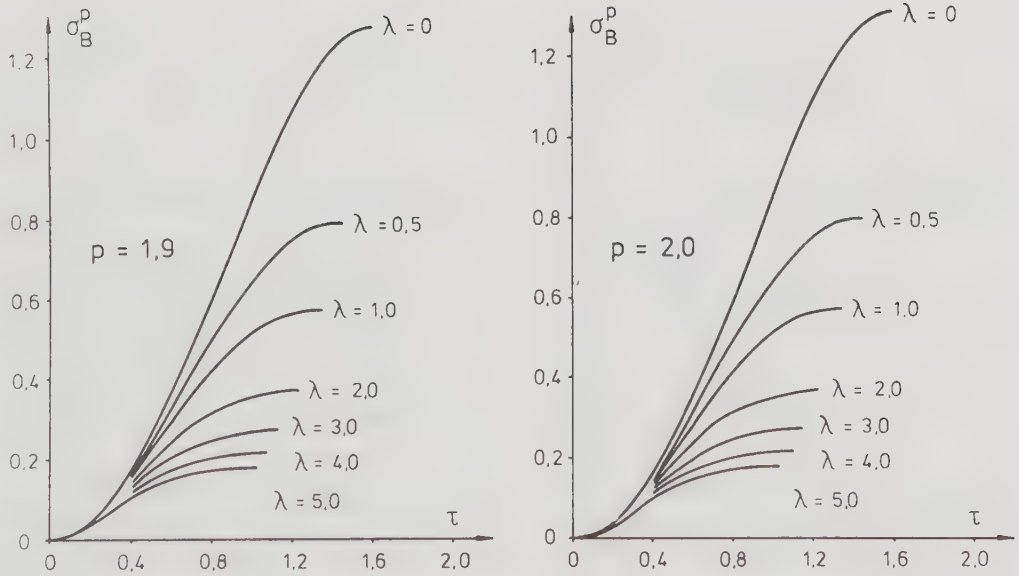


Bild 4.3 Dimensionslose Stoßkraft $\sigma_B^p(\tau)$ für verschiedene Stoßkennzahlen λ und Belastungsexponenten p

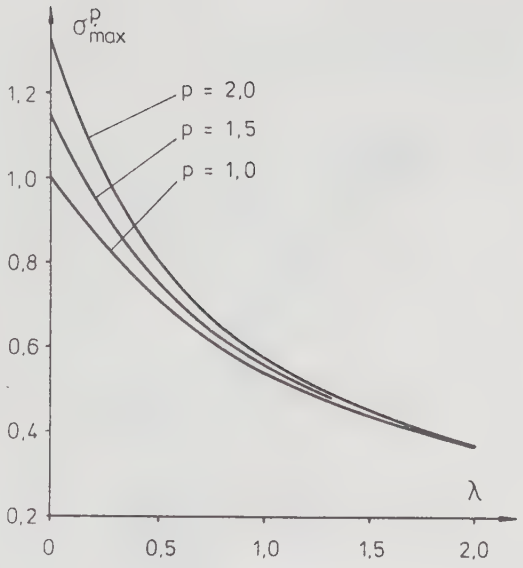


Bild 4.4 Dimensionslose maximale Stoßkraft $\sigma^p_{max}(\lambda)$ für verschiedene Belastungsexponeten p

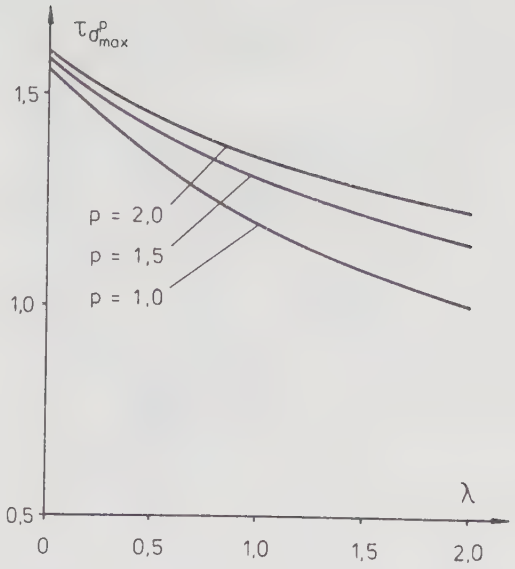


Bild 4.5 Dimensionslose Zeit der maximalen Stoßkraft $\tau_{\sigma^p_{max}}(\lambda)$ für verschiedene Belastungsexponenten p

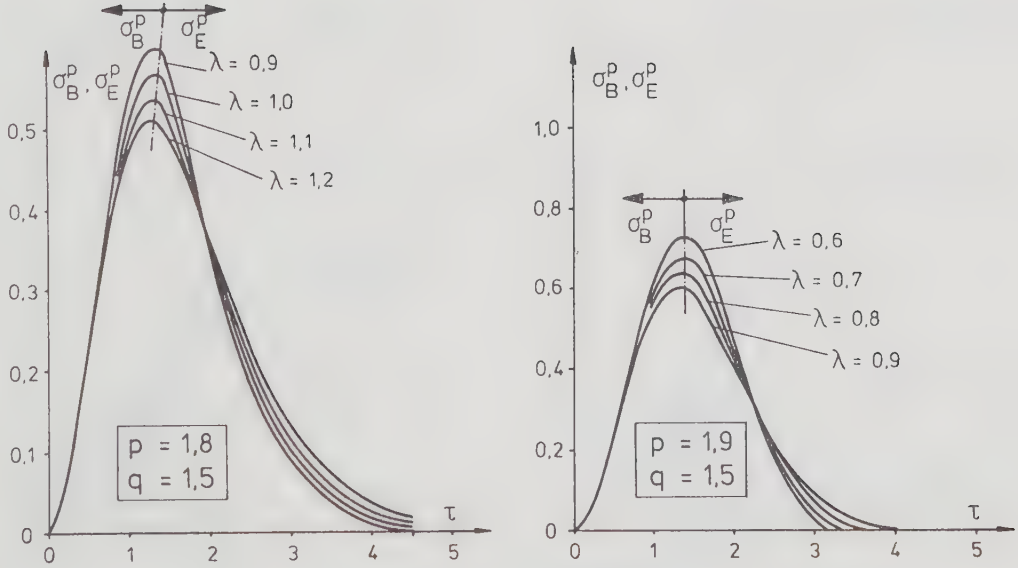
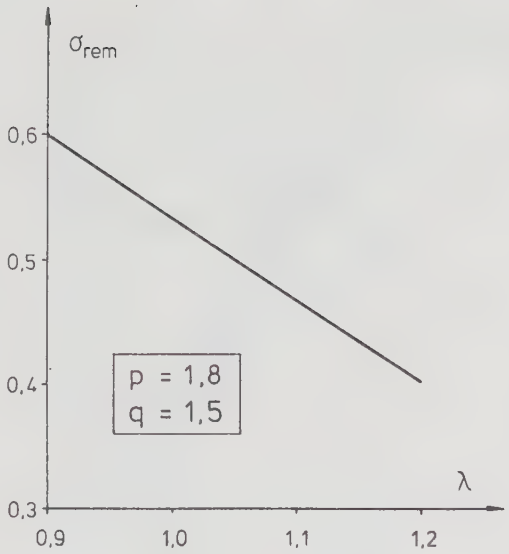


Bild 4.6 Dimensionslose Stoßkraft δ_B^p bzw. δ_E^p als Funktion der dimensionslosen Zeit τ für verschiedene Belastungsexponenten p



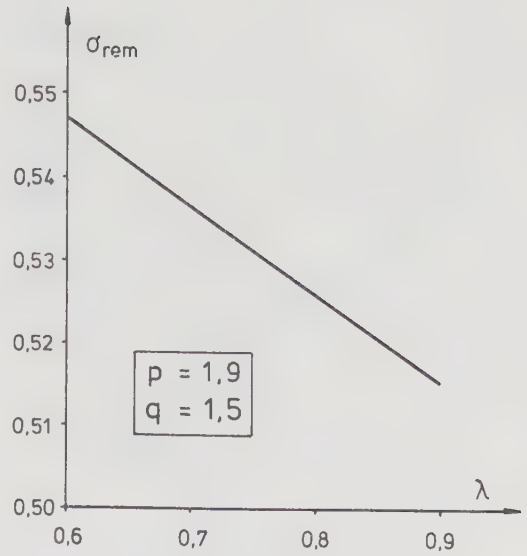


Bild 4.7 Dimensionslose bleibende Annäherung σ_{rem} als Funktion der Stoßkennzahl λ für verschiedene Belastungsexponenten p

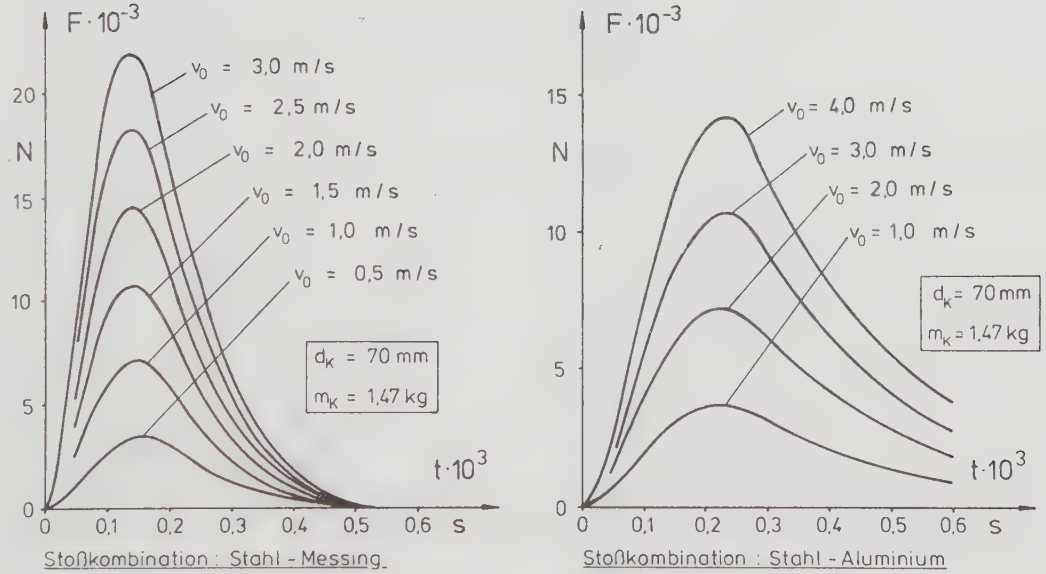


Bild 4.8 Berechnete Stoßkraft F(t) für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten v_o

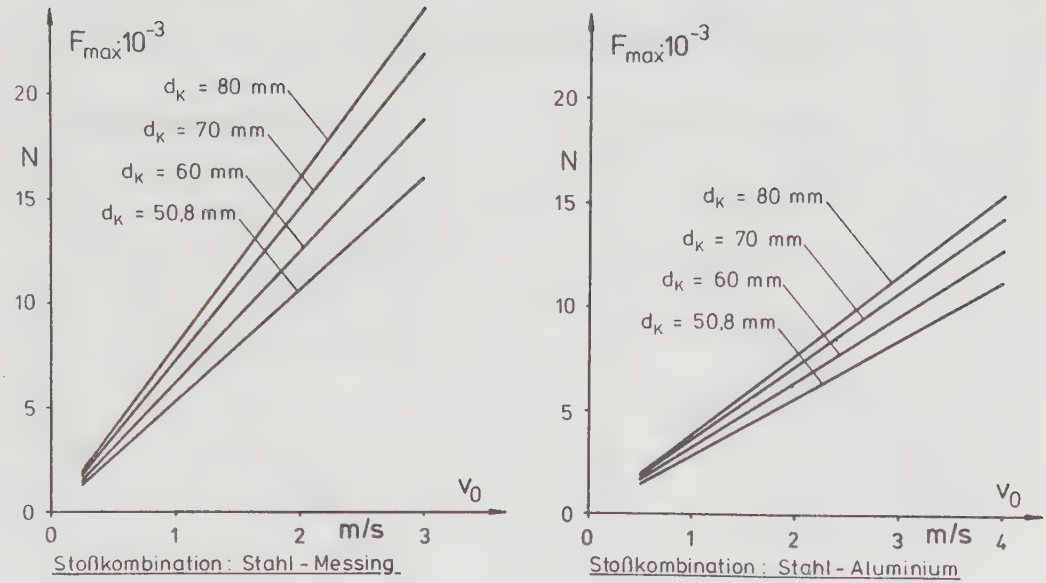


Bild 4.9 Maximale Stoßkräfte $F_{max}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K

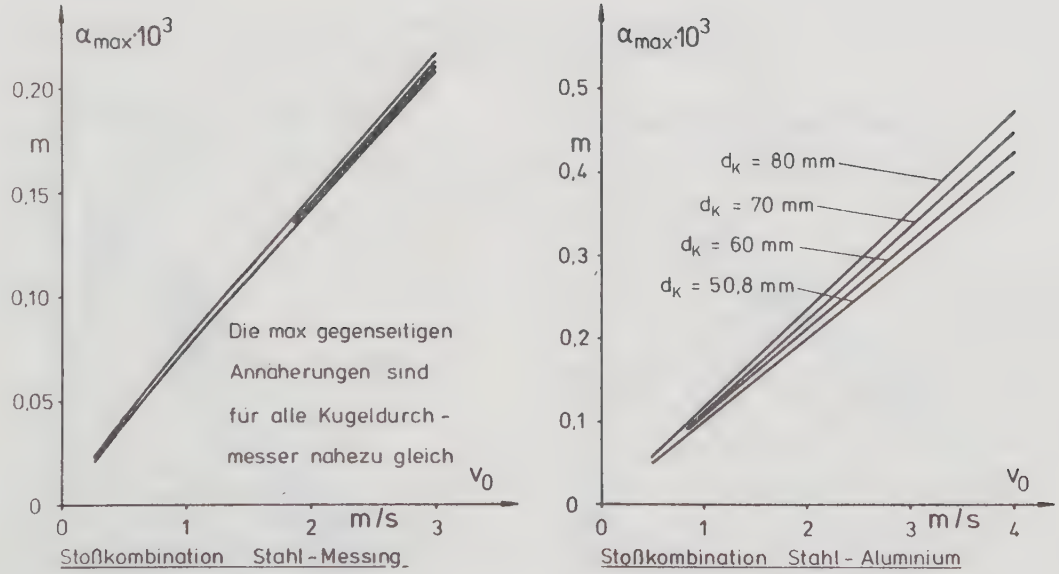


Bild 4.10 Maximale gegenseitige Annäherung $\alpha_{max}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K

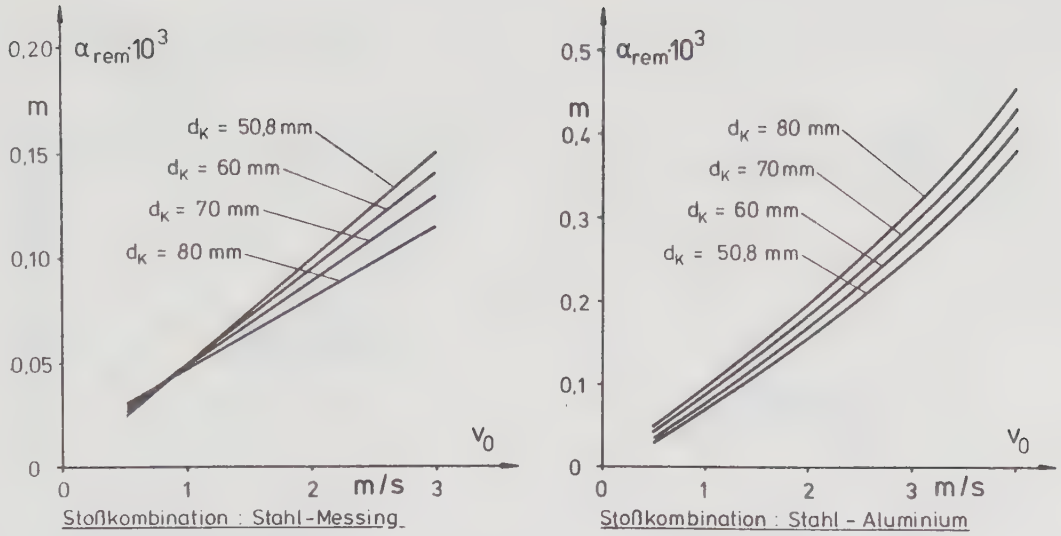


Bild 4.11 Bleibende gegenseitige Annäherung $\alpha_{rem}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K

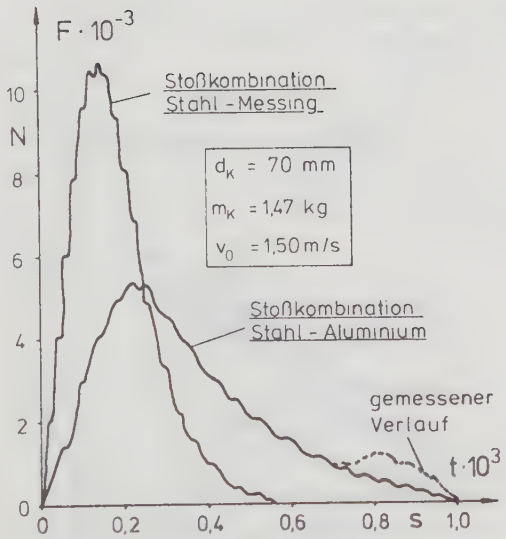


Bild 5.1 Experimentell ermittelter Stoßkraftverlauf F(t)

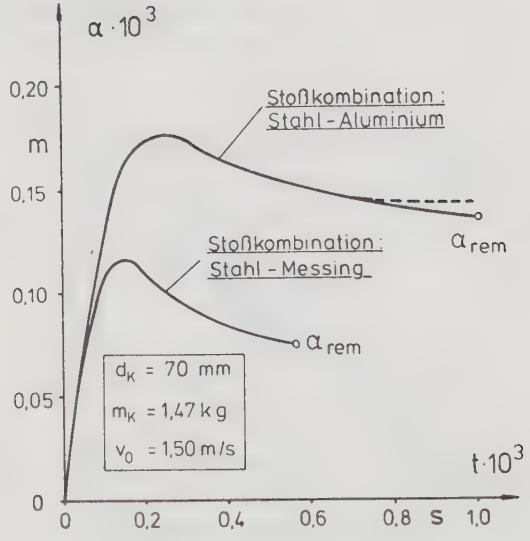


Bild 5.2 Gegenseitige Annäherung α(t) berechnet aus experimentell ermitteltem Stoßkraftverlauf F(t)

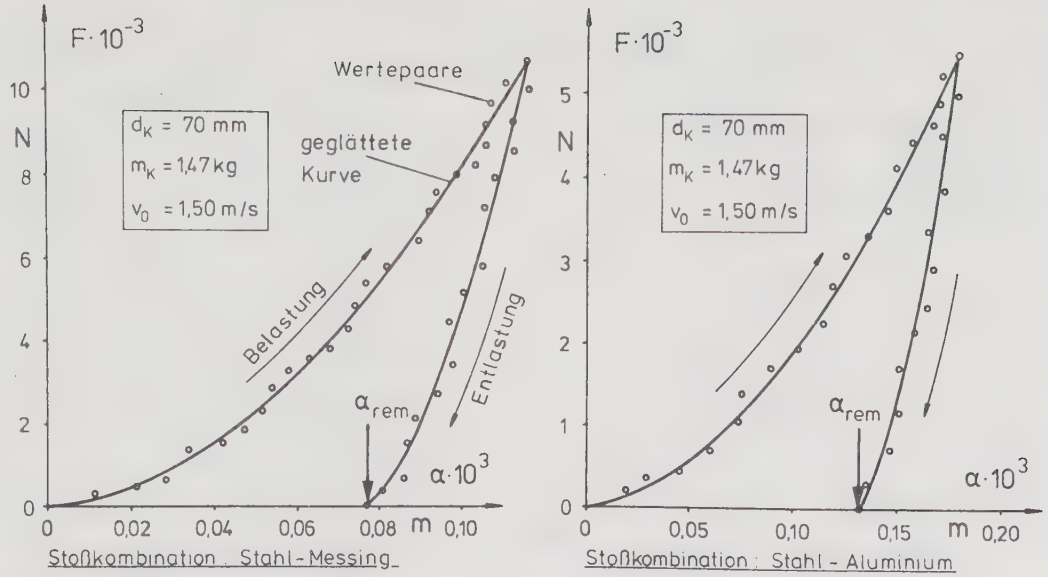


Bild 5.3 Stoßkraft F als Funktion der gegenseitigen Annäherung α (Kontaktkraftgesetze)

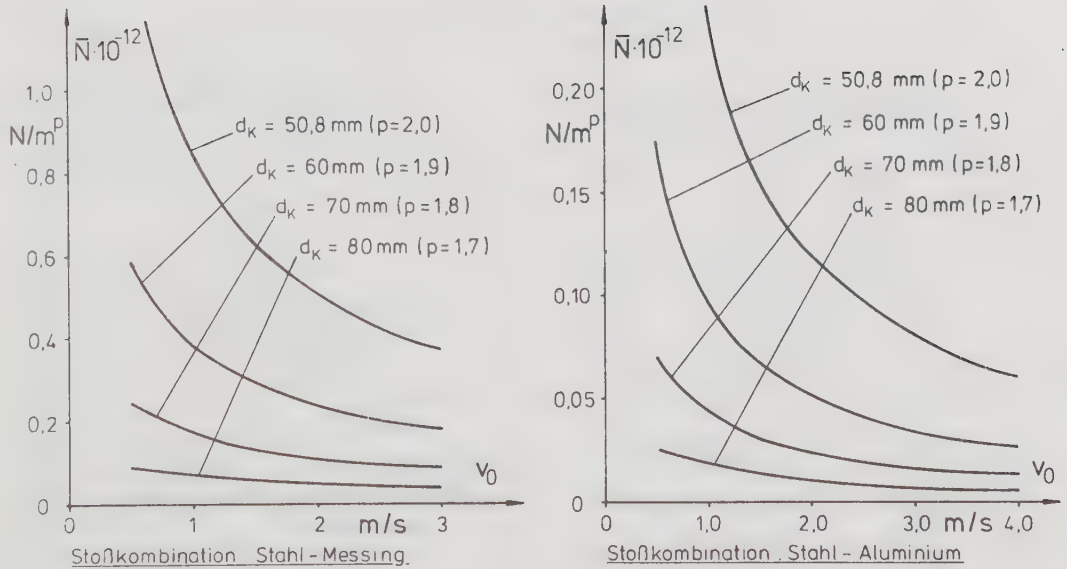


Bild 5.4 Belastungskoeffizient $\bar{N}$ als Funktion der Stoßgeschwindigkeit v_o für verschiedene Kugeldurchmesser d_K

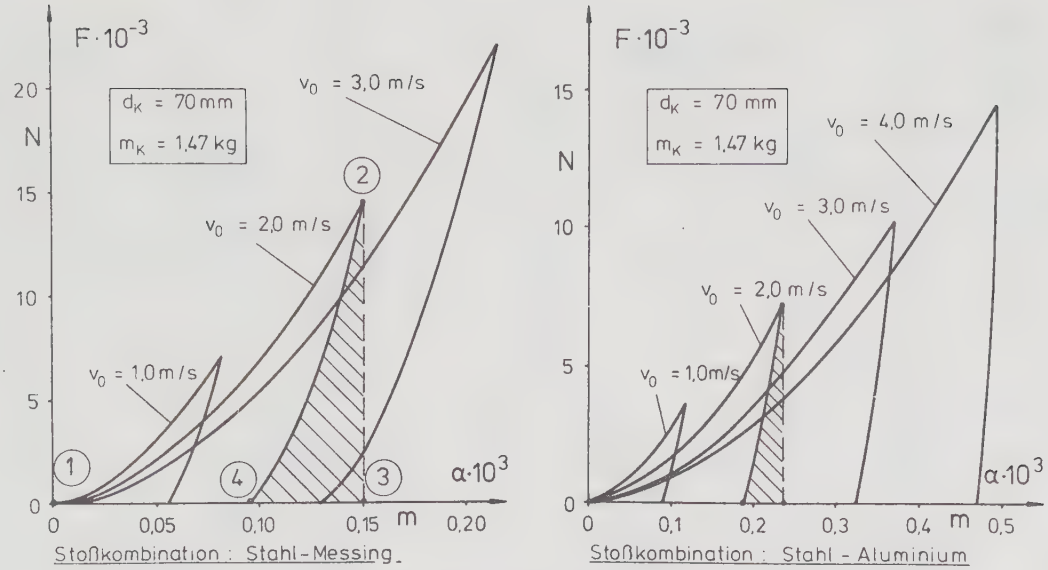


Bild 5.5 Stoßkraft F als Funktion der gegenseitigen Annäherung α für verschiedene Stoßgeschwindigkeiten v_o (Kontaktkraftgesetze: ausgeglichene Kurven)

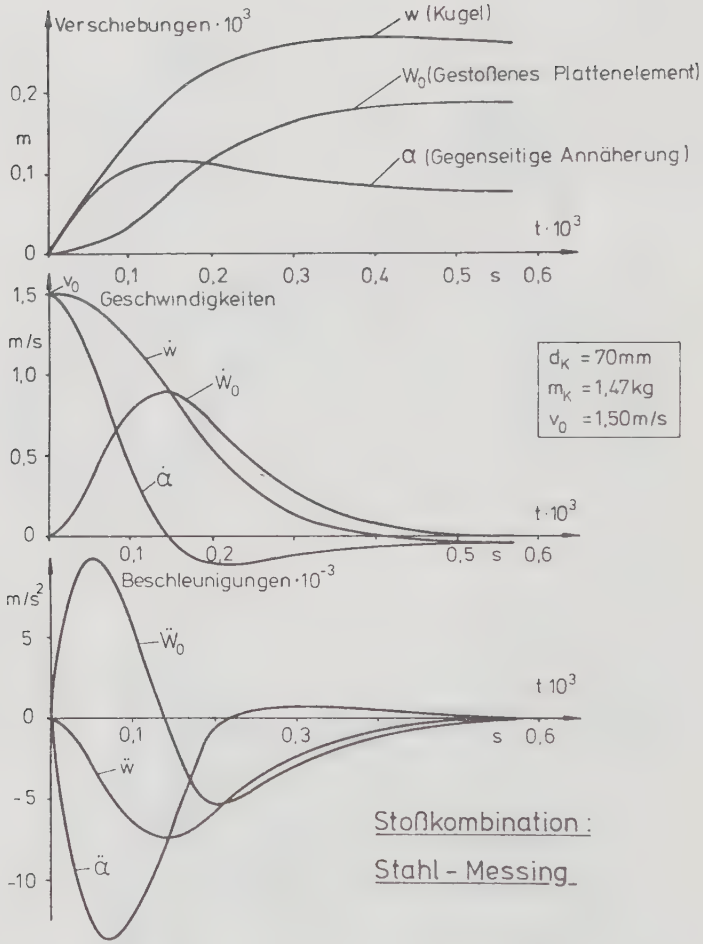


Bild 6.1 Kinematische Verhältnisse beim Plattenstoß

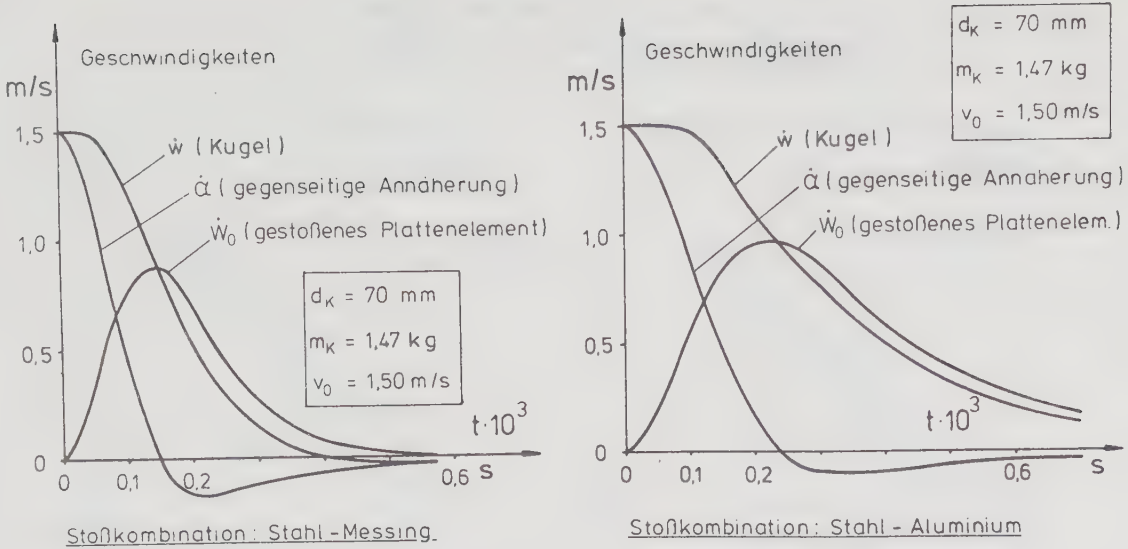
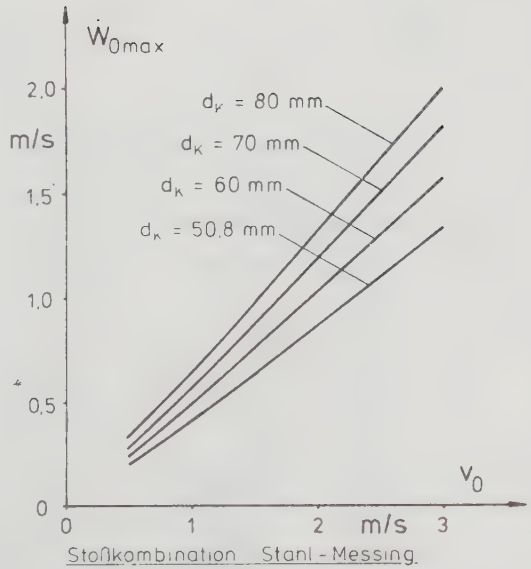


Bild 6.2 Schwerpunktsgeschwindigkeiten der Stoßpartner und Annäherungsgeschwindigkeiten während der Kontaktwechselwirkung in Abhängigkeit von der Zeit



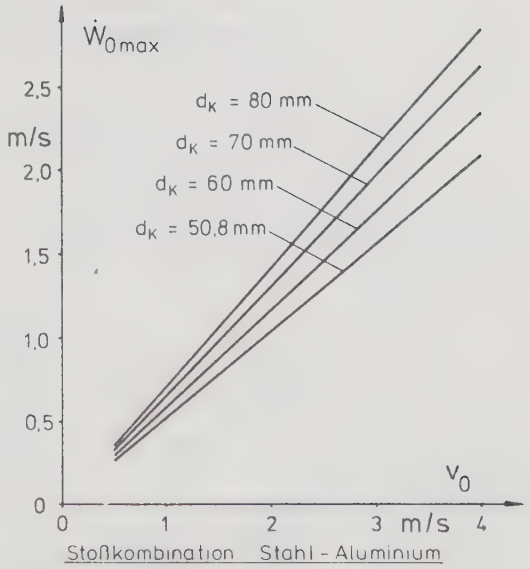


Bild 6.3 Maximale Schwerpunktsgeschwindigkeit des gestoßenen Plattenelementes $\dot{W}_{omax}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K innerhalb des Frühstadiums

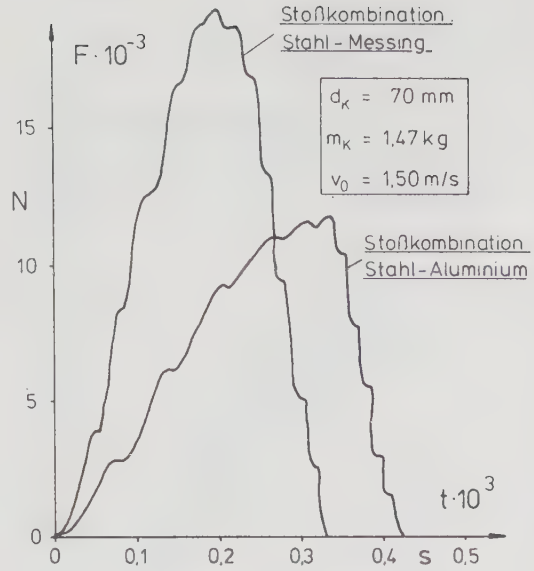


Bild 7.1 Experimentell ermittelte Stoßkraft F(t) beim Blockstoß für verschiedene Stoßkombinationen

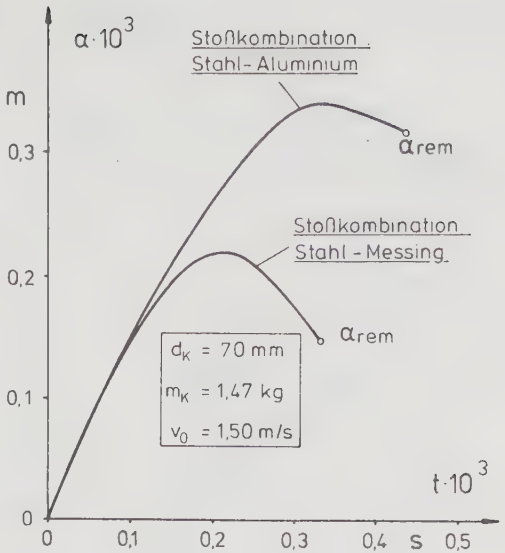


Bild 7.2 Gegenseitige Annäherung α(t) aus experimentell ermittelter Stoßkraft F(t) für verschiedene Stoßkombinationen (Blockstoß)

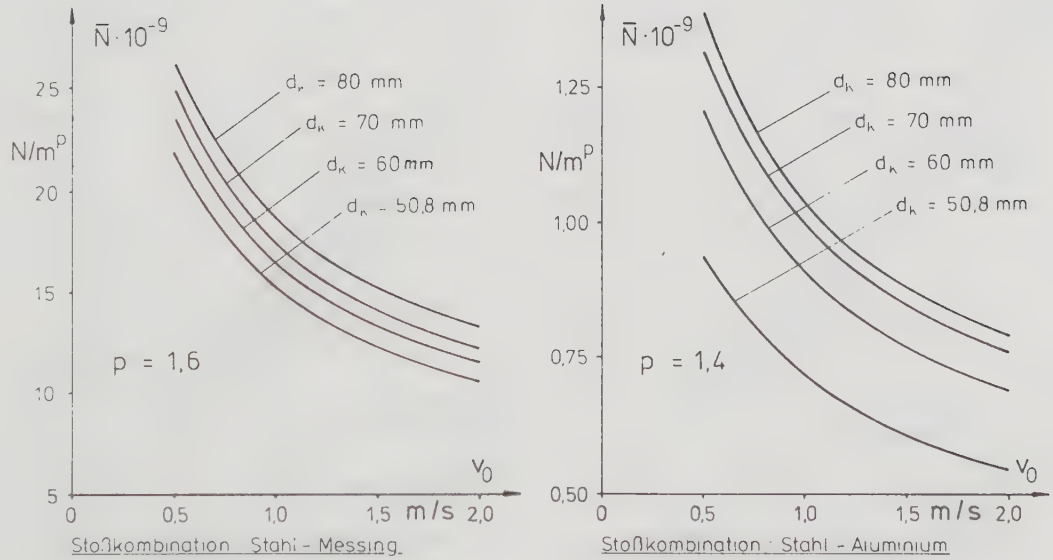


Bild 7.3 Belastungskoeffizient $\bar{N}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K beim Blockstoß (Belastungsexponent: p=1,6 und p=1,4)

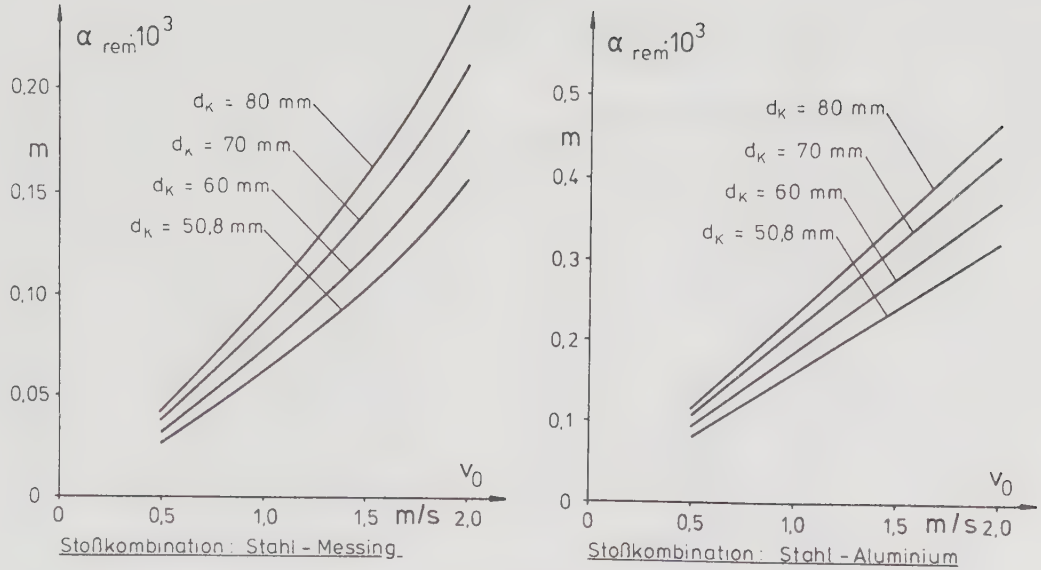


Bild 7.4 Bleibende gegenseitige Annäherung $\alpha_{rem}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K beim Blockstoß

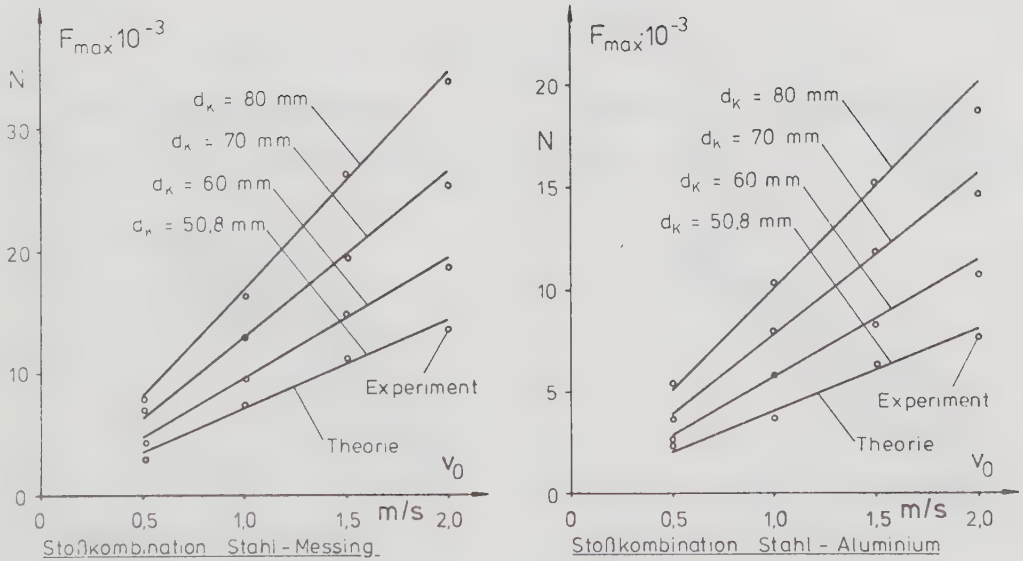


Bild 7.5 Maximale Stoßkraft $F_{max}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K beim Blockstoß

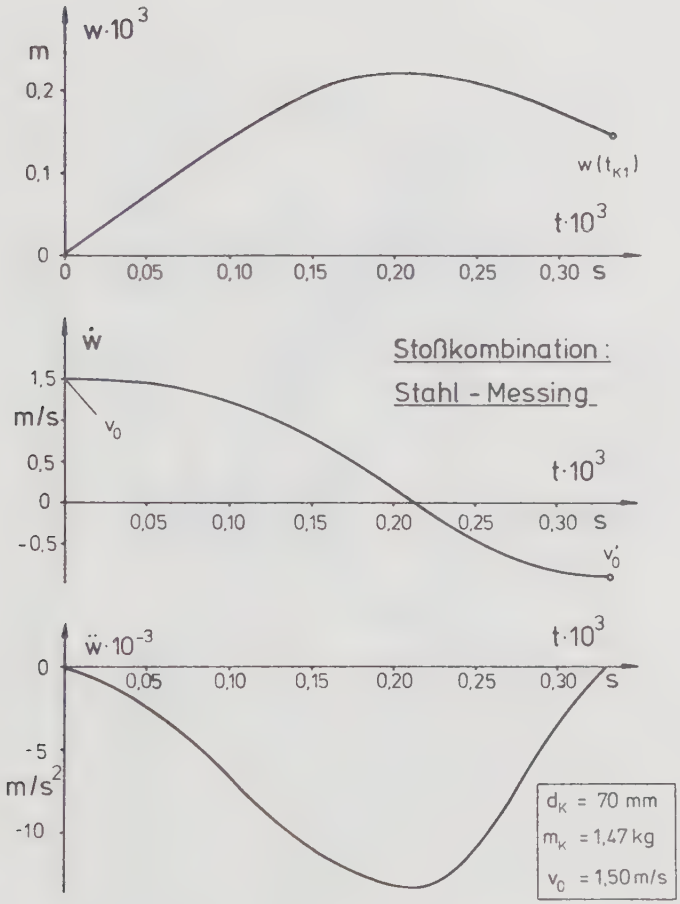


Bild 7.6 Kinematische Verhältnisse beim Blockstoß für die Stoßkombination Stahl-Messing

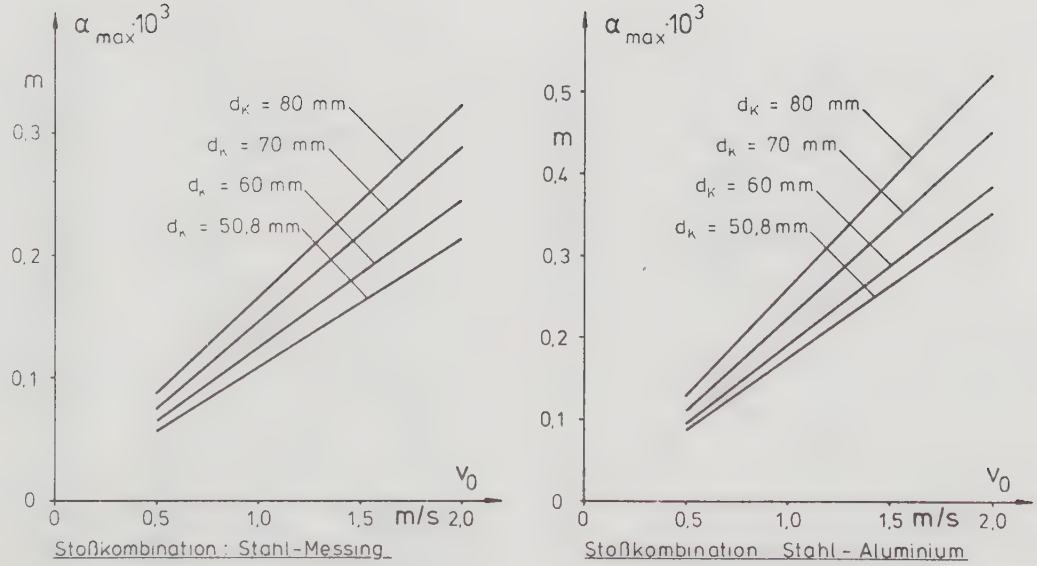


Bild 7.7 Maximale gegenseitige Annäherung $\alpha_{max}(v_o)$ für verschiedene Kugeldurchmesser d_K beim Blockstoß

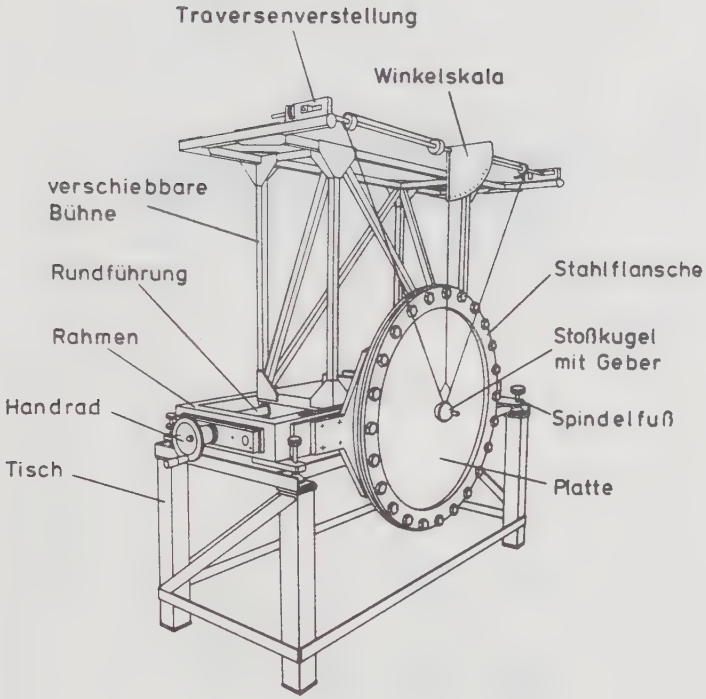
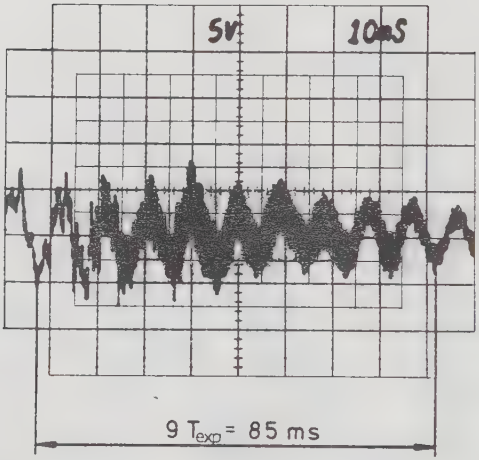


Bild 8.1 Schema der Versuchsanordnung für den transversalen Stoß auf eine Platte

Messingplatte



$$T_{exp} = 9{,}4 \cdot 10^{-3}\ s$$

$$(\omega_1)_{exp} = \frac{2\pi}{T_{exp}}$$

$$(\omega_1)_{exp} = 668\ s^{-1}$$

$$(\omega_1)_{theo} = \left(\frac{3{,}196}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{B}{\rho_p\, h}\right)^{0{,}5}$$

$$(\omega_1)_{theo} = 707\ s^{-1}$$

Bild 8.2 Gegenüberstellung von berechneter und experimentell bestimmter Eigenfrequenz

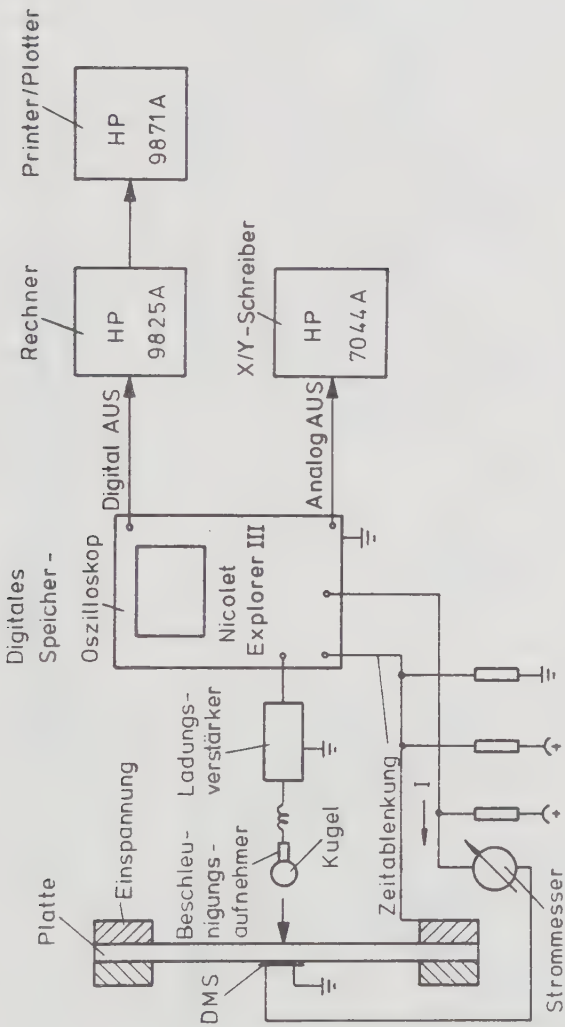
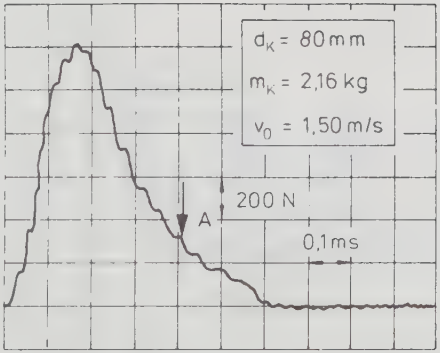
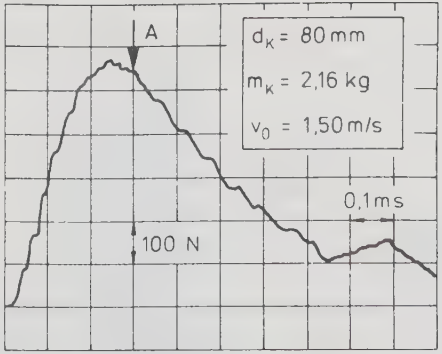


Bild 8.3 Anordnung zur Messung und Weiterverarbeitung des Stoßkraft- und des Axialdehnungsverlaufes



A: Ankunftszeit der ersten vom Rand reflektierten Wellen



$c_B \approx 2060$ m/s ; $t_{Früh} \approx 0{,}39$ ms

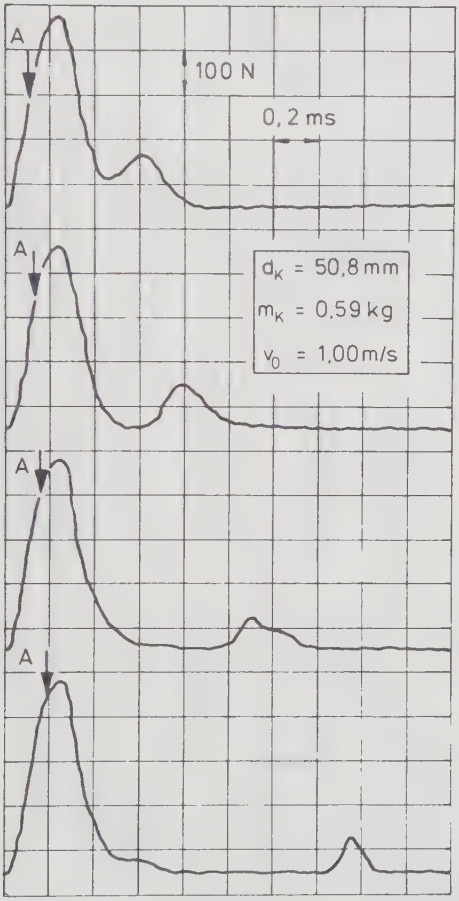
Stoßkombination Stahl - Messing

$c_B \approx 2870$ m/s ; $t_{Früh} \approx 0{,}28$ ms

Stoßkombination Stahl - Aluminium

Bild 8.4 Zeitlicher Verlauf der Stoßkraft F(t) für verschiedene Stoßkombinationen (Schirmbildbelegaufnahmen)

Stoßkombination : Stahl - Aluminium



A = 97,6 µs
r_A = 0,31 m

A = 125,4 µs
r_A = 0,27 m

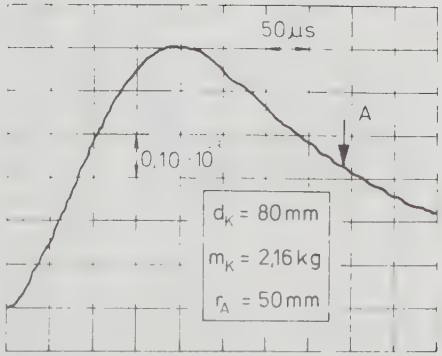
A = 153,3 µs
r_A = 0,23 m

A = 181,2 µs
r_A = 0,19 m

Bild 8.5 Stoßkraftsignale von Kontaktstellen unterschiedlicher Entfernungen ($R-r_A$) zum Plattenrand (die zweiten Stoßkraftsignale hängen vermutlich mit den reflektierten Wellen zusammen)

Stoßkombination : Stahl - Messing

Stoßgeschwindigkeit $v_0 = 1{,}50$ m/s



A Ankunftszeit der ersten vom Rand reflektierten Wellen

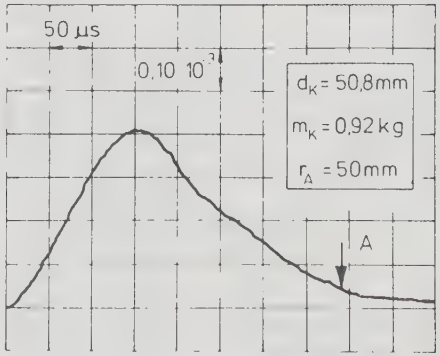


Bild 8.6 Zeitlicher Verlauf der unter der Stoßstelle gemessenen Axialdehnungen $\varepsilon_{axial}(t)$ (Schirmbildbelegaufnahmen)

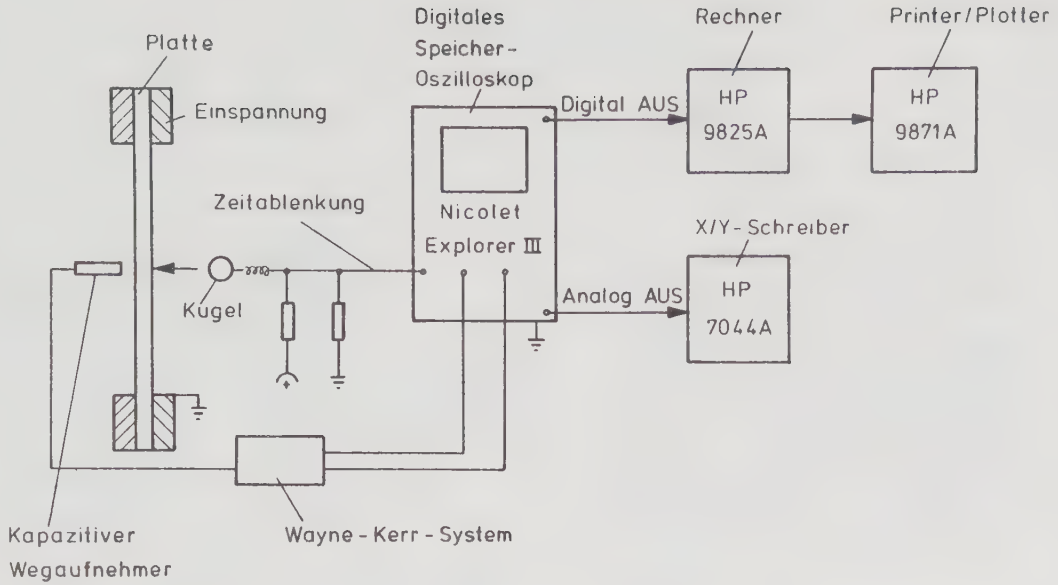


Bild 8.7 Anordnung zur Messung und Weiterverarbeitung des zeitlichen Durchbiegungsverlaufes

Stoßkombination : Stahl - Messing

Stoßgeschwindigkeit : $v_0 = 1{,}50\ m/s$

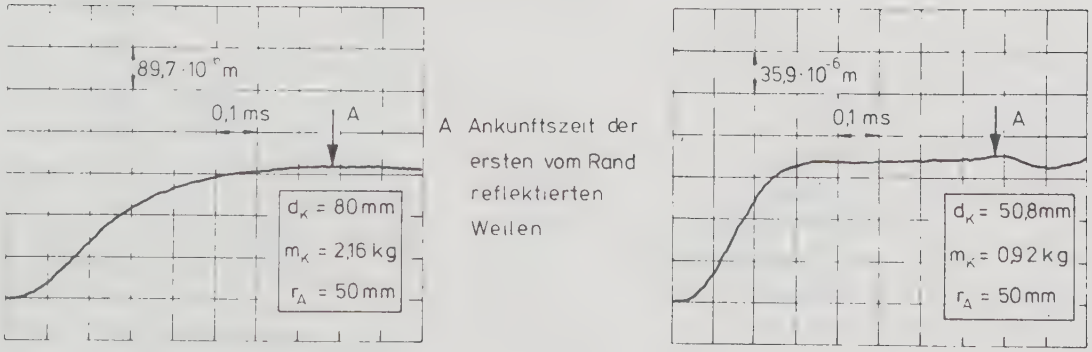


Bild 8.8 Zeitlicher Verlauf der unter der Stoßstelle gemessenen Plattendurchbiegung $W_o(t)$ (Schirmbildbelegaufnahmen)

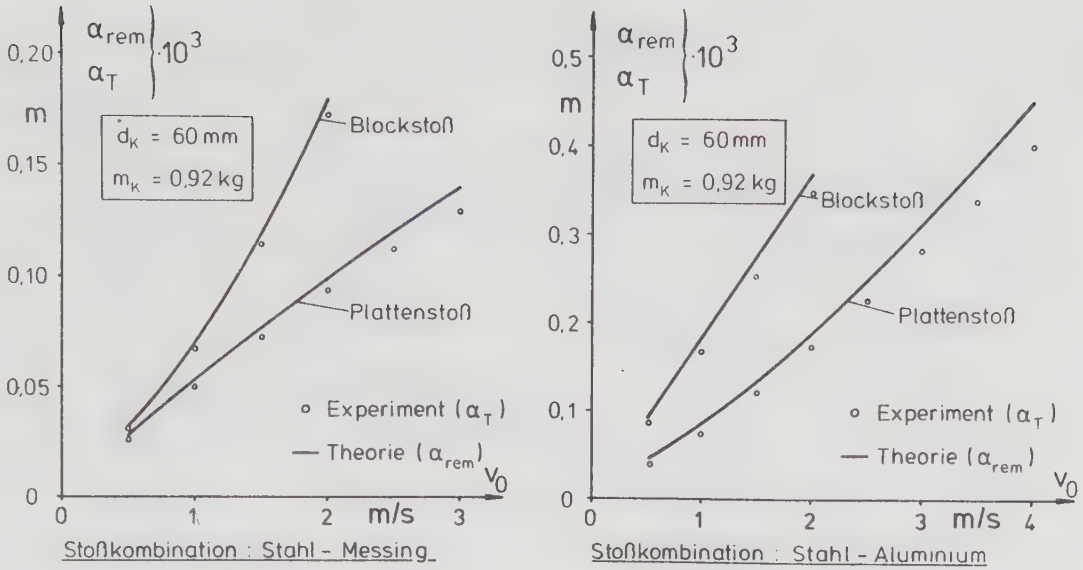


Bild 8.9 Bleibende Annäherung α_{rem} und Kratertiefe α_T als Funktion der Stoßgeschwindigkeit v_o

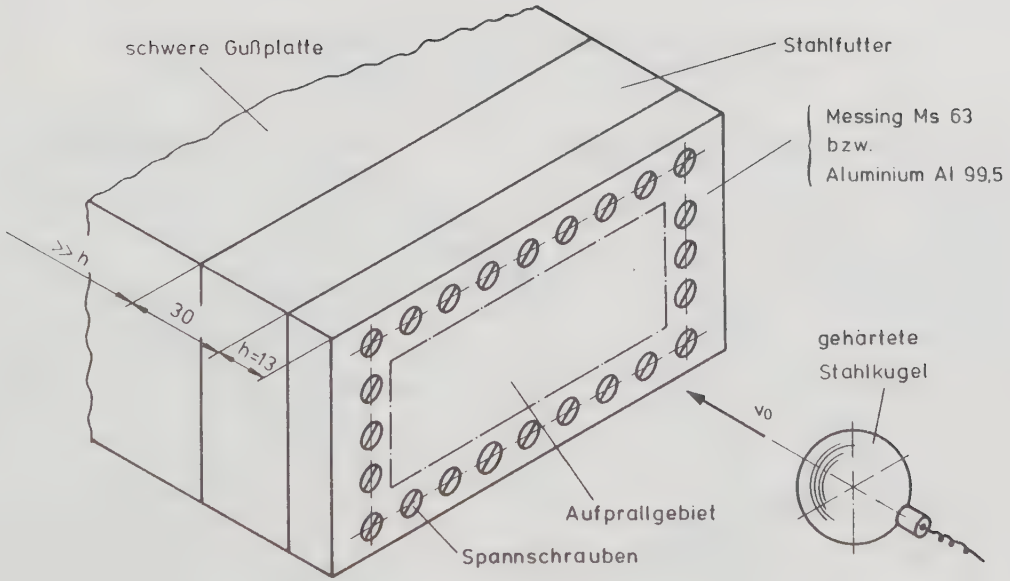


Bild 8.10 Schema der Versuchsanordnung für den Stoß auf einen unendlichen Halbraum (Blockstoß)

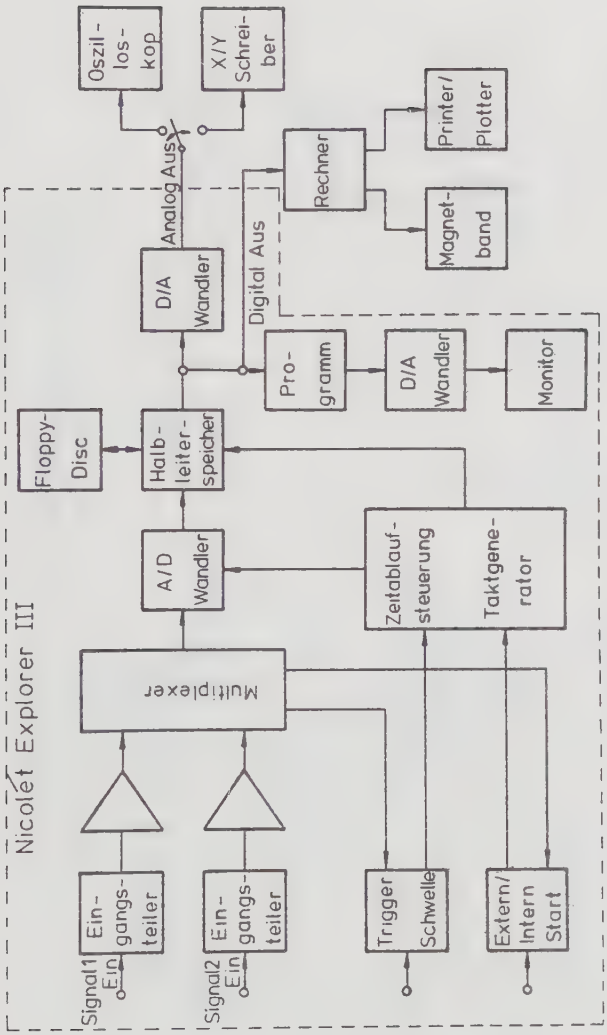


Bild 9.1 Prinzipschaltbild eines digitalen Speicher-oszilloskops mit angeschlossenen Peripherie-geräten

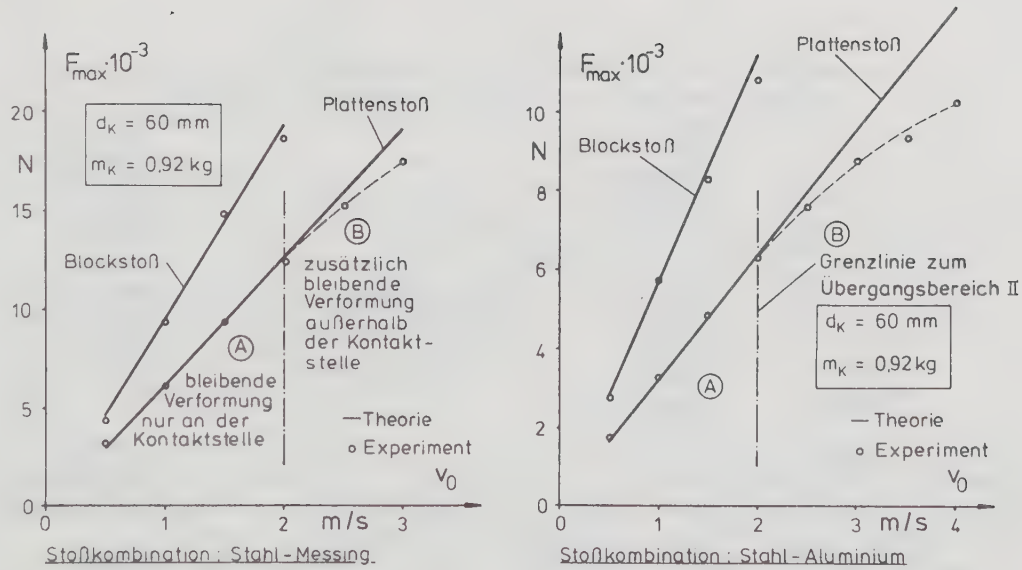


Bild 10.1 Vergleich von experimentell und rechnerisch ermittelten maximalen Stoßkräften $F_{max}(v_o)$

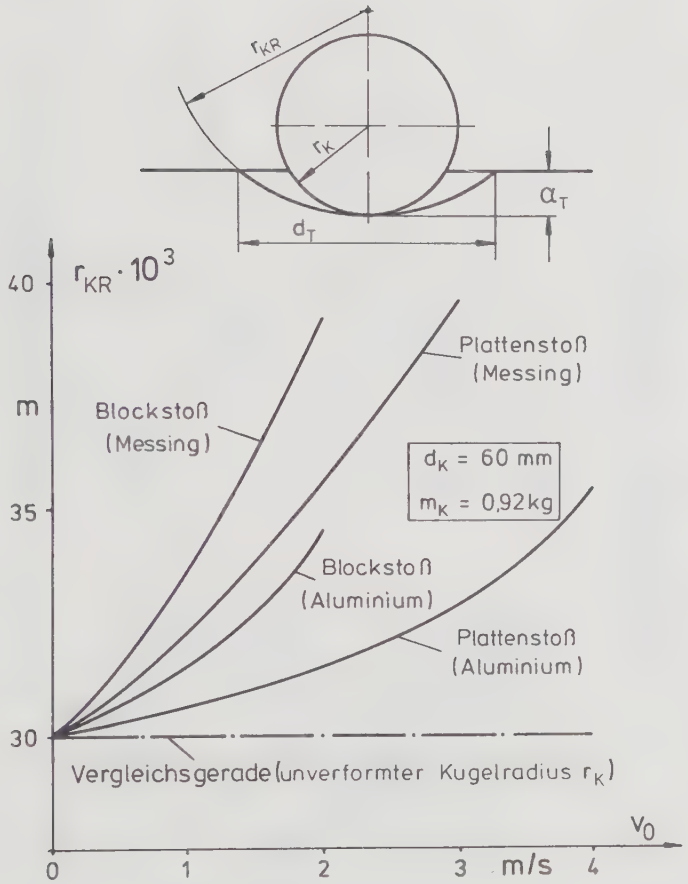


Bild 10.2 Krümmungsradius r_{KR} des bleibenden Stoßkraters als Funktion der Stoßgeschwindigkeit v_o

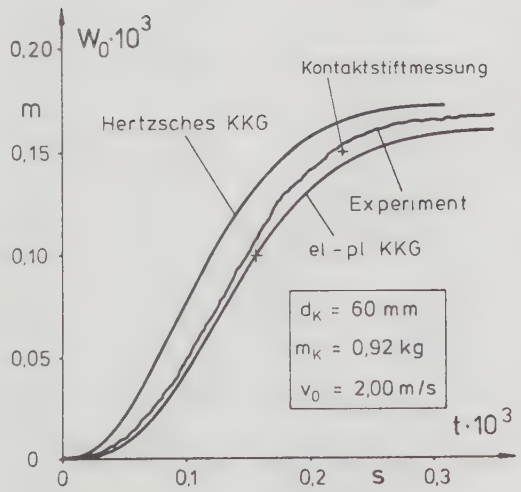


Bild 10.3 Durchbiegung $W_o(t)$ unter der Kontaktstelle

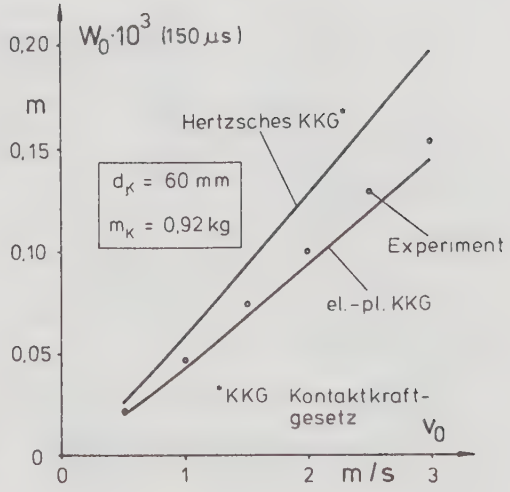


Bild 10.4 Durchbiegung W_o (150 µs) unter der Kontaktstelle als Funktion der Stoßgeschwindigkeit v_o

Stoßkombination : Stahl-Messing

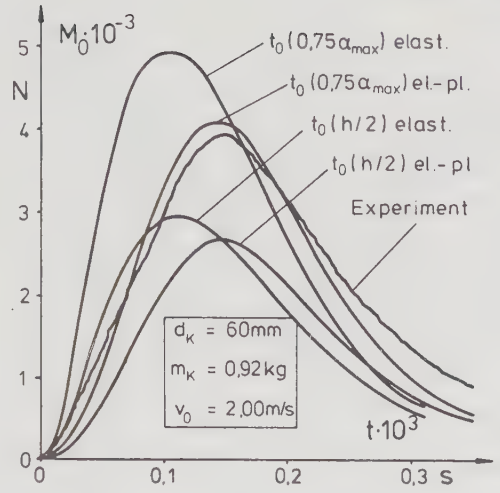


Bild 10.5 Biegungsmoment $M_o(t)$ unter der Kontaktstelle berechnet mit unterschiedlichem Kontaktradius

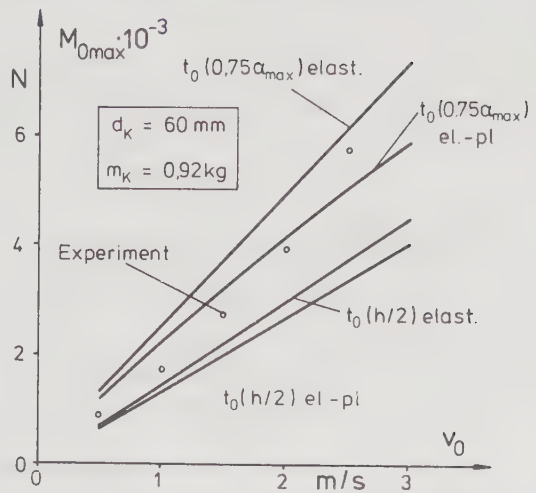


Bild 10.6 Maximales Biegungsmoment M_{omax} als Funktion der Stoßgeschwindigkeit v_o

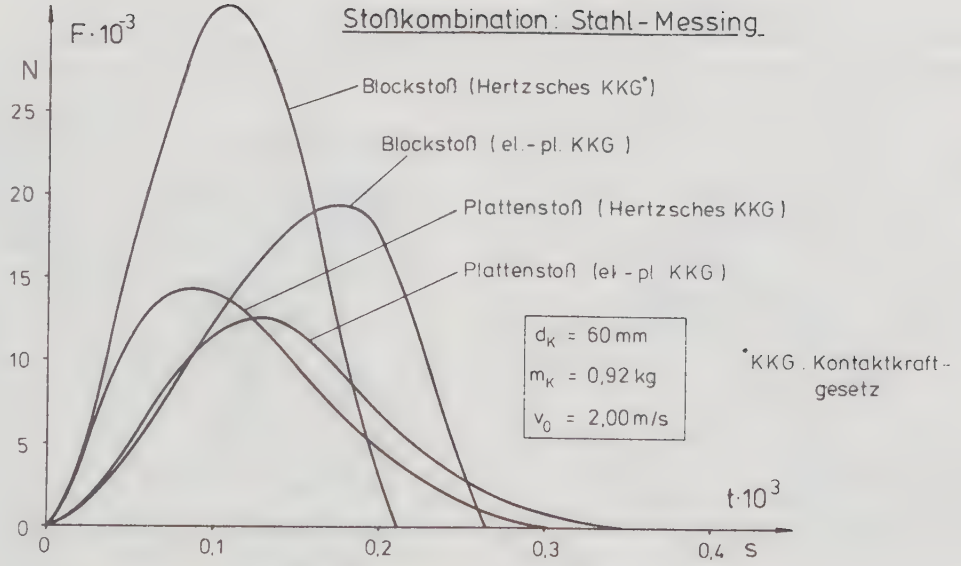


Bild 11.1 Zeitlicher Verlauf der Stoßkräfte F(t) (berechnet) für unterschiedliche Kontaktkraftgesetze

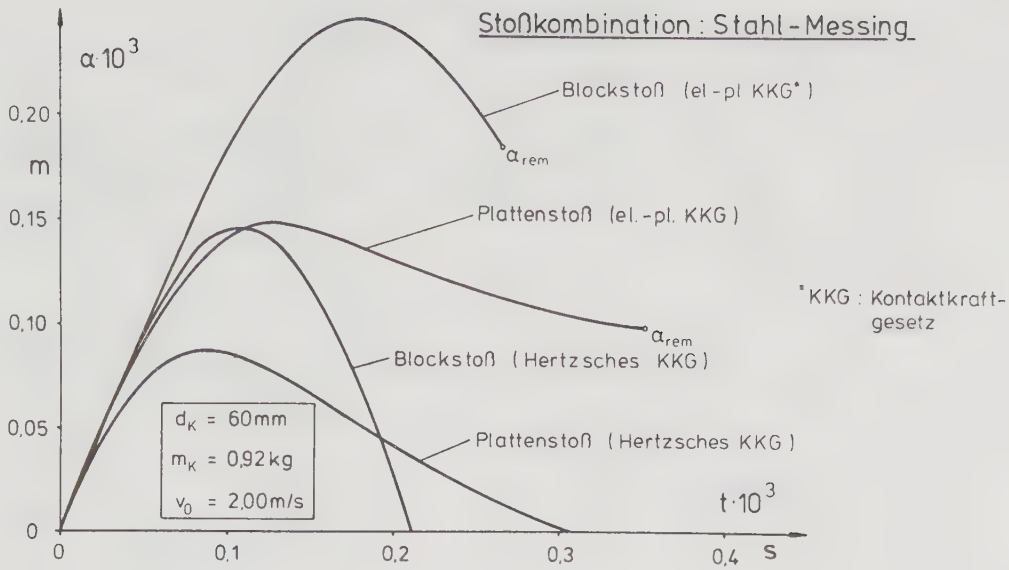


Bild 11.2 Zeitlicher Verlauf der gegenseitigen Annäherung $\alpha(t)$ für unterschiedliche Kontaktkraftgesetze

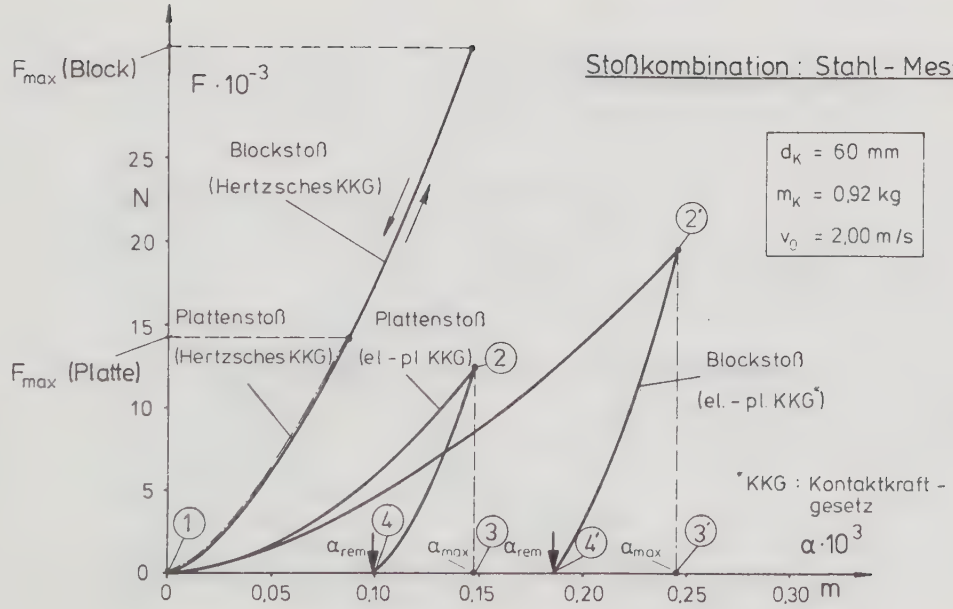


Bild 11.3 Stoßkraft F als Funktion der gegenseitigen Annäherung α für unterschiedliche Kontaktkraftgesetze

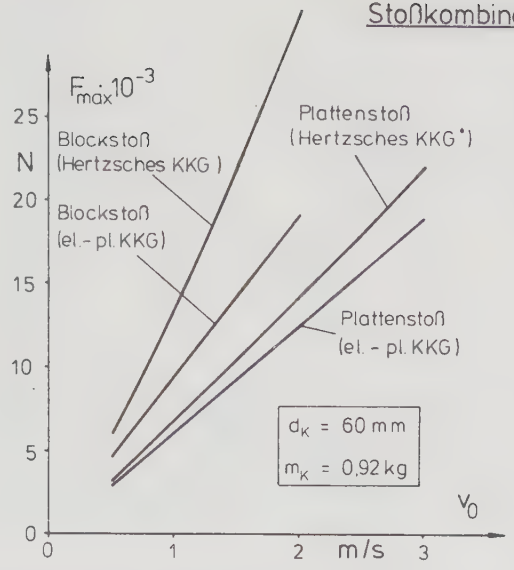


Bild 11.4 Maximale Stoßkraft $F_{max}(v_o)$ für verschiedene Kontaktkraftgesetze

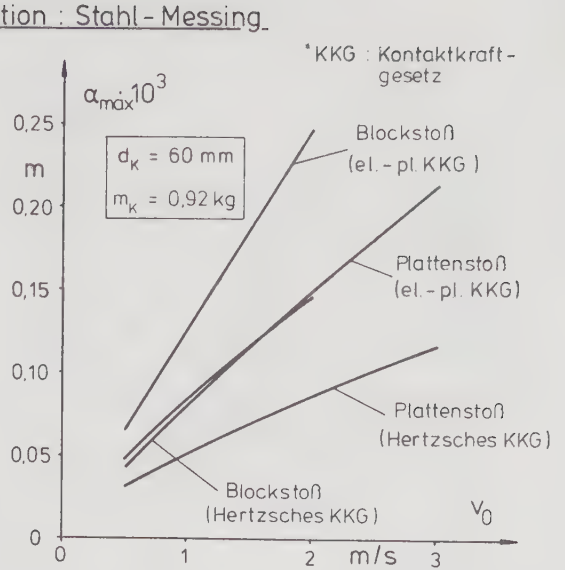


Bild 11.5 Maximale gegenseitige Annäherung $\alpha_{max}(v_o)$ für verschiedene Kontaktkraftgesetze

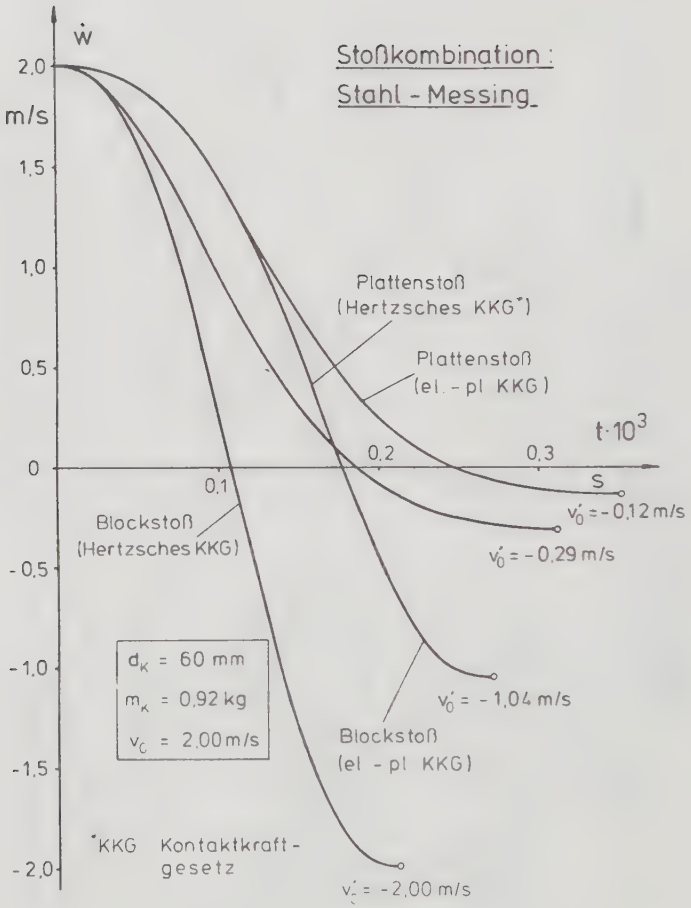


Bild 11.6 Geschwindigkeit $\dot{w}(t)$ der Stoßkugel während der Kontaktwechselwirkung für verschiedene Kontaktkraftgesetze

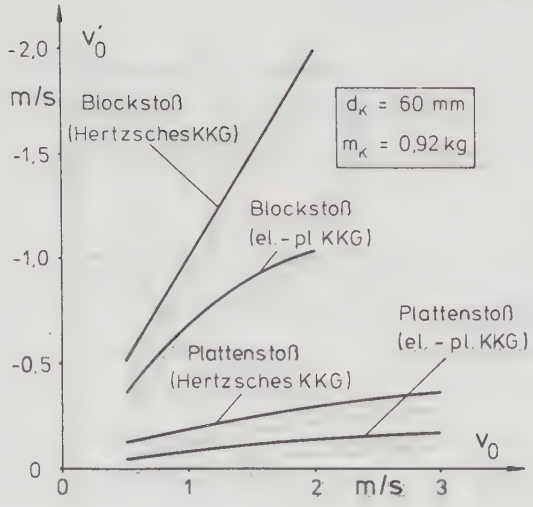


Bild 11.7 Rückprallgeschwindigkeit der Kugel $v_o'(v_o)$ für verschiedene Kontaktkraftgesetze

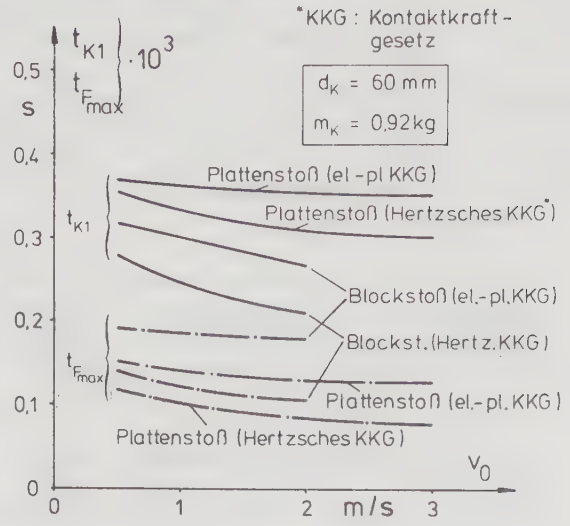


Bild 11.8 Kontaktzeit $t_{K1}(v_o)$ und Zeitpunkt maximaler Stoßkraft t_{Fmax} (v_o) für verschiedene Kontaktkraftgesetze

n	1	2	3	4
$p_n R$	3,19622	6,30643	9,43949	12,57713
n	5	6	7	8
$p_n R$	15,71644	18,85655	21,99709	25,13792
n	9	10	11	12
$p_n R$	28,27891	31,42003	34,56124	37,70251

Tab. 1 Eigenwertparameter einer am Rand eingespannten Kreisplatte

Lebenslauf

03.05.1948	geboren in Gelsenkirchen als Sohn des Konstrukteurs Johann Dombrowski und dessen Ehefrau Anna, geb. Kriegs
Familienstand	verheiratet, 2 Kinder
Schulbildung	
1954 - 1962	Volksschule in Gelsenkirchen
1962 - 1965	Berufsschule in Gelsenkirchen
1963 - 1967	Berufsaufbauschule (Abendform) in Gelsenkirchen Abschluß: Fachschulreife
Berufsausbildung	
1962 - 1965	Maschinenschlosserlehre beim Hüttenwerk Oberhausen Abschluß: Facharbeiterbrief
Studium	
SS 1967 - SS 1970	Studium an der Staatlichen Ingenieurschule Essen Abt. Maschinenbau Abschluß: Ing. grad. Maschinenbau
WS 1972/73 - WS 1977/78	Studium an der Ruhr-Universität Bochum Abt. Maschinenbau Abschluß: Dipl.-Ing. Maschinenbau
Wehrdienst	
1971 - 1972	Dienst als Wehrpflichtiger
Berufliche Tätigkeit	
1965 - 1967	Maschinenschlosser beim Hüttenwerk Oberhausen
1970 - 1971	Konstruktions- und Planungsingenieur bei der Firma Fleischer in Gelsenkirchen
ab 01.12.1977	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik Arbeitsgruppe "Experimentelle Mechanik" der Ruhr-Universität

D. GRÄBNER
DISSERTATIONS U. OFFSETDRUCKEREI

Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon: 09545 /8791